Gran Premio di Matematica - Edizione 2002

SOLUZIONI FINALE DELLA GARA MATEMATICA

Problemi a risposta aperta

1) L'ambulante

Un ambulante vuole vendere ad una sagra paesana, che si svolgerà la prossima domenica, articoli di scarso valore e qualità sulla sua bancarella "**TUTTO A 5 €**". Un magazzino gli propone l'acquisto di uno stock di occhiali da sole a 2 € ciascuno e di ombrelli a 3 € ciascuno. Sappiamo che può comprare una qualunque quantità dei due articoli, rispettando la sua disponibilità economica di 1200 € e che il magazzino è disposto a ritirare la merce invenduta a 1 € ogni pezzo reso (occhiali o ombrelli indifferentemente). La sua esperienza gli permette inoltre di prevedere con certezza che:

- se piove venderà tutti gli ombrelli, ma nessun occhiale
- se la giornata è a pieno sole venderà tutti gli occhiali e il 10% degli ombrelli
- altrimenti venderà il 70% degli occhiali e il 50% degli ombrelli.

Quanti occhiali ed ombrelli dovrà acquistare in modo da massimizzare il guadagno sui suddetti articoli?

Risposta

Posto x il numero degli occhiali e y il numero degli ombrelli acquistati, il costo complessivo vale 2x+3y €,

Cominciamo a risolvere il problema tramite la seguente tabella, nella quale sono indicati vendite, rimanenze, ricavi e guadagni in relazione ai diversi stati del tempo:

stato del tempo	Vendite		Rimanenze		"calcolo dei ricavi"	**ricavi**	**guadagni**
	Occh.	Ombrel.	Occh.	Ombrel.			
pioggia	0	y	x	0	5y+x	x+5y	-x+2y
sole	x	y/10	0	9y/10	5x+5y/10+9x/10	5x+7y/5	3x-8y/5
altro	7x/10	y/2	3x/10	y/2	35x/10+5y/2+3x/10+y/2	19x/5+3y	9x/5

Ovviamente disponendo di 1200 €, deve essere 2x+3y = 1200 (più compra, più guadagna), ma pur non potendo prevedere lo stato del tempo, può comunque ipotizzare un guadagno minimo g (incognito), al di sotto del quale non deve assolutamente scendere qualunque tempo farà!

Abbiamo allora il sistema con x e y *intere* e *non negative*.

$$\begin{cases} 2x+3y=1200 \\ -x+2y \ge g \\ 3x-\frac{8}{5}y \ge g \\ \frac{9}{5}x \ge g \end{cases}$$

Sostituendo alle disuguaglianze il segno di uguaglianza, abbiamo i 3 sistemi:

1) $\begin{cases} 2x+3y=1200 \\ -x+2y=3x-\frac{8}{5}y \qquad (=g) \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+3y=1200 \\ -x+2y=\frac{9}{5}x \qquad (=g) \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+3y=1200 \\ 3x-\frac{8}{5}y=\frac{9}{5}x \qquad (=g) \end{cases}$

Risolti e confrontati con la disuguaglianza rimanente si ha:

1) x = 225, y = 250, g = 275, **verificata**

2) x = 6000/31 ≈ 194, y = 8400/31 ≈ 271, g = 10800/31 ≈ 348, **non verificata**

3) x = 4800/17 ≈ 282, y = 3600/17 ≈ 212, g = 8640/17 ≈ 508, **non verificata**

Quindi se l'ambulante compra 225 occhiali e 250 ombrelli avrà un guadagno assicurato di 275 €, qualunque tempo ci sarà (e se è variabile guadagnerà altri 130 € !).

N.B. La redazione ha volutamente reso inaccettabili le soluzioni **non intere**, per rendere più semplice affrontare il problema, anche graficamente. Purtroppo ciò non accade sempre nei casi reali!

2) Dal film *Il Buono, il Brutto, il Cattivo* (Sergio Leone, 1966):

Durante la guerra di secessione americana, tre avventurieri si mettono alla ricerca di una cassa di dollari oro sottratta all'esercito sudista. Sono Joe il Biondo (Clint Eastwood) detto **il Buono**, Tuco Benedicto (Eli Wallach) detto **il Brutto**, Sentenza (Lee Van Cleff) detto **il Cattivo**. La caccia al tesoro termina a Sad Hill, in mezzo a una sconfinata distesa di croci e tombe, nella piazza circolare del Cimitero di Guerra, con un **duello a tre**.............

Il "triello" avverrà seguendo le seguenti regole:

- si spara un solo colpo a testa a uno qualunque degli altri avversari
- l'ordine di sparo è stabilito casualmente all'inizio, pescando una pagliuzza (chi pesca la più corta spara per primo, chi pesca la più lunga per ultimo)
- si continua a sparare in quell'ordine, finché due di essi muoiono
- il sopravvissuto prende il tesoro.

Sappiamo inoltre che Sentenza (**il Cattivo**) è **infallibile**, cioè sicuramente uccide l'avversario a cui spara, Joe (**il Buono**) lo è all'**80%**, mentre Tuco (**il Brutto**) colpisce solo con probabilità del **50%**. Dopo aver stabilito la strategia migliore dei tre, determinate chi ha maggior probabilità di sopravvivere e di prendere il tesoro.

Ovviamente la strategia ottimale è sparare il primo colpo all'avversario più preciso nel tiro, perché poi, nel caso che si elimini tale persona, il duellante rimanente è quello con meno probabilità di colpirci.
In base a ciò Sentenza sparerà a Joe (e lo colpisce con certezza!), Joe a Sentenza (e lo colpisce all'80%) e a Tuco conviene senz'altro fallire il bersaglio (quindi sparerà in aria!), poiché chiunque rimanga è più preciso di lui.
Con questa strategia Tuco (**il Brutto**) ha certamente probabilità superiore al 50% di sopravvivere, mentre gli altri due ne hanno complessivamente meno del 50%.

N.B. Il calcolo esatto delle probabilità di sopravvivenza dei tre non era richiesto dal problema, in quanto abbastanza complicato.
Tuttavia per Sentenza i passaggi sono facili perché abbiamo:
1/2 (se spara prima di Joe) · 1/2 (se sopravvive a Tuco) + 1/2 (se spara dopo a Joe) · 2/10 (se sopravvive a Joe) · 1/2 (se sopravvive a Tuco) = 1/4 + 1/20 = 3/10 = 30 %.

Più difficili gli altri calcoli che richiedono di risolvere un'equazione, infatti per Joe abbiamo:
1/2 (se spara prima di Sentenza) · 8/10 (se uccide Sentenza) · 1/2 (se sopravvive a Tuco) · x = 1/5 · x
dove x è la probabilità che Joe ha di sopravvivere a Tuco in una sequenza indefinita di spari sbagliati (infatti nessuno dei due è infallibile).
Si ha l'equazione:
x = 8/10 (se uccide Tuco) + 2/10(se non lo uccide) ·1/2 (se sopravvive a Tuco) · x, cioè
x = 4/5 + 1/10 · x, da cui x = 8/9
quindi la probabilità che ha Joe di prendere il tesoro è 1/5 · 8/9 = 8/45 = 17,78%

Dai due risultati precedenti la probabilità che ha Tuco di prendere il tesoro è 1–3/10 – 8/45 = 47/90 = 52,22%

3) Il primo assegno in Euro

Paolo cambia in una banca il suo primo assegno in Euro, ma il cassiere distratto gli paga in Euro la cifra indicata dai centesimi e in centesimi la cifra indicata in Euro. Inoltre, mentre conta i soldi incassati perde una monetina da 5 € cent. Tuttavia si ritiene fortunato, poiché la somma che gli rimane è esattamente il doppio di quella indicata dal suo primo assegno.
A quanto ammontava l'assegno?

Se x è la cifra degli Euro e y quella dei centesimi l'assegno ammontava a 100x + y (in € cent), mentre la somma riscossa è stata di 100y + x (sempre i € cent).
Abbiamo allora l'equazione:
100y + x – 5 = 2(100x + y), cioè 199x – 98y + 5 = 0, con le condizioni 0 < x < 100 e 0 < y < 100.
Essa ha l'unica soluzione intera accettabile x = 31 e y = 63, quindi l'assegno era di € 31,63.

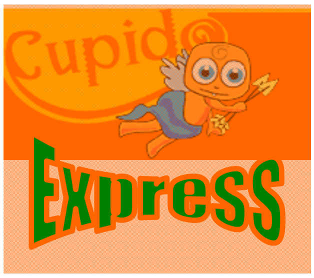
N.B. Il calcolo poteva anche essere fatto **esaustivamente**, scrivendo in una tabella due cifre per gli Euro e due cifre per i centesimi di Euro, con la condizione che la cifra dei centesimi doveva essere **più del doppio** di quella degli Euro; da questa condizione y>50, perché il suo doppio deve generare un riporto, inoltre è pure y=2x+1, perché il riporto non può essere superiore a un Euro; quindi y è dispari e di conseguenza anche x è dispari (perché x–5 è per forza pari, essendo un numero doppio di centesimi).

x	y	controllo
25	51	non verifica
27	55	non verifica
29	59	non verifica
31	63	**verifica**
33	67	non verifica
35	71	non verifica
37	75	non verifica
39	79	non verifica
41	83	non verifica
43	87	non verifica
45	91	non verifica
47	95	non verifica
49	99	non verifica

Con solo 4 tentativi si trova la risposta del problema; con altri 9 se ne dimostra l'unicità!

4) L'agenzia Matrimoniale

L'agenzia Matrimoniale "*Cupido-Express*" deve formare nove coppie di aspiranti sposi.
Dai test psicologici approntati su 10 maschi e 9 femmine partecipanti viene redatta la tabella sottostante. In essa sono riportati i punteggi (da 1 a 10) relativi alle diverse possibilità di formare coppie stabili, che rispettino al massimo le aspirazioni, le preferenze, gli hobbies, le attitudini e quant'altro è necessario per un legame duraturo (!).



♥/♥	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9
m1	10	10	8	8	9	7	7	6	8
m2	9	9	6	6	6	6	8	8	8
m3	9	6	5	9	5	6	10	8	8
m4	9	8	6	7	5	6	10	6	5
m5	8	8	6	7	10	9	10	10	9
m6	9	5	7	6	9	10	10	9	8
m7	8	8	6	7	9	9	8	8	7
m8	9	9	7	5	10	8	9	7	8
m9	9	8	5	8	9	8	8	8	6
m10	8	9	4	5	6	7	8	7	7

Determinate quale maschio non risulterà accoppiato, tenuto conto che tutte le coppie devono avere la massima affinità possibile.

Sappiamo che il massimo punteggio per ogni coppia è 10, quindi l'ideale è trovare 9 coppie con 10 punti e scartare il maschio che rimane da solo, ma ciò non capita nella tabella in esame in quanto sia le righe m2, m7, m9, m10 e le colonne f3, f4, f9 non hanno il massimo punteggio.

Facciamo allora le seguenti osservazioni:

- Se aggiungiamo alla matrice una colonna f10 (la "femmina fantasma"), con punteggi tutti nulli, da accoppiare al maschio in esubero il problema non cambia
- L'assegnazione con il massimo punteggio **esiste** in quanto il numero dei possibili accoppiamenti è finito

(pur molto grande: 10! = 3.628.800), anche se non è detto che sia unica

Introduciamo allora la colonna relativa alla "femmina fantasma" e segniamo una sola cella in ogni riga e in ogni colonna in modo che il punteggio complessivo sia **massimo**. Con pochi tentativi si ottiene il seguente risultato:

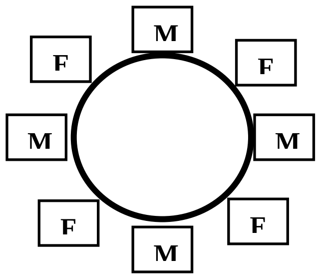
♥/♥	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10
m1	10	10	*** 8**	8	9	7	7	6	8	0
m2	9	9	6	6	6	6	8	8	*** 8**	0
m3	9	6	5	*** 9**	5	6	10	8	8	0
m4	9	8	6	7	5	6	*** 10**	6	5	0
m5	8	8	6	7	10	9	10	*** 10**	9	0
m6	9	5	7	6	9	*** 10**	10	9	8	0
m7	8	8	6	7	9	9	8	8	7	*** 0**
m8	9	9	7	5	*** 10**	8	9	7	8	0
m9	*** 9**	8	5	8	9	8	8	8	6	0
m10	8	*** 9**	4	5	6	7	8	7	7	0

Il punteggio complessivo è allora 8+8+9+10+10+10+0+10+9+9 = 83, che è senz'altro massimo essendo formato dai massimi di riga **oppure** di colonna possibili.
La soluzione è anche unica, pur essendo più difficile dimostrarlo (ma non richiesto!), tuttavia l'unico maschio non accoppiato (sta con la "femmina fantasma") è **m7** in quanto in ogni altro caso si perderebbe punteggio.

Problemi a risposta multipla

1) La cena.

Quattro coppie di amici cenano seduti a una tavola rotonda, alternandosi maschio e femmina come in figura.
In quante posizioni diverse possono disporsi?

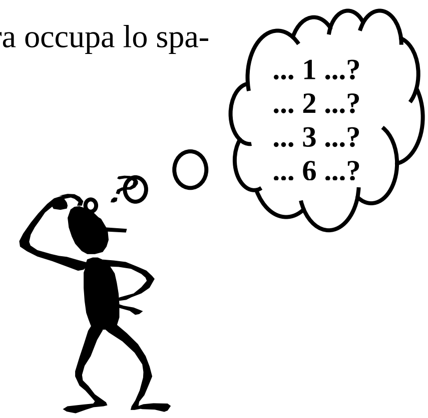


A. 24
B. 64
C. 144(°)
D. 256

Essendo la tavola rotonda possiamo fissare una persona (per esempio un maschio) in un posto qualunque. Gli altri tre maschi si possono disporre in 3·2·1 = 6 modi diversi e le 4 femmine in 4·3·2·1 = 24 modi diversi. In tutto abbiamo 6·24 = 144 modi.
N.B. Una rotazione della tavola (rotonda!) non fa cambiare l'ordine di disposizione, quindi non si può asserire che il primo maschio può occupare 8 diversi posti; d'altronde se fosse ammissibile anche questo, il numero dei casi sarebbe 8·144 = 1152 che non c'è nell'elenco!

2) La sequenza.

Data la seguente sequenza di cifre: 3, 1, 4, 1, 5, 9, ... Quale cifra occupa lo spazio dei puntini?



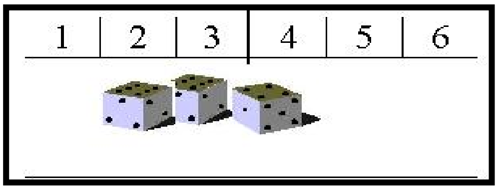
A. 1
B. 2 (°)
C. 3
D. 6

Era sufficiente ricordare che π = 3,1415926535.... la cifra è il 2

3) Il gioco dei tre dadi.

Un gioco d'azzardo ha le seguenti regole:
Una persona punta 10 € su un solo numero da 1 a 6 e lancia tre dadi. Se il numero puntato esce una volta la persona ritira la propria posta e vince 10 €, se esce due volte ritira la propria posta e vince 20 €, se esce tre volte ritira la propria posta e vince 30 € (ovviamente, se il numero puntato non esce perde la posta di 10 €). Può ripetere le puntate quante volte vuole. Stabilire se:

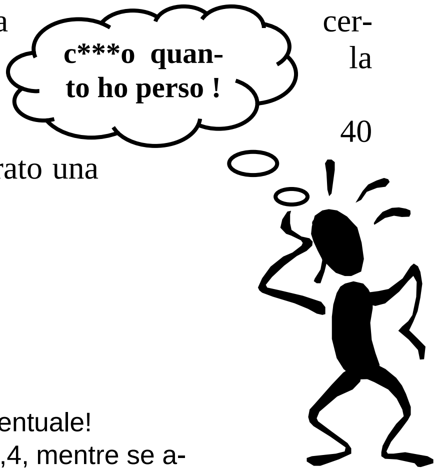
A. Il gioco è equo
B. Il gioco è favorevole a chi tiene il banco (°)
C. Il gioco è favorevole al giocatore
D. Non possiamo stabilire nessuna delle precedenti risposte se non sappiamo il numero delle puntate effettuate



Anche se lanciamo tre dadi e vi sono sei possibili numeri, la probabilità che esca un certo numero (una sola volta) non è $3/6 = 1/2$ (il che renderebbe il gioco favorevole al giocatore), ma solo $1/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 \cdot 3 = 25/72$.
La probabilità che quel numero esca due volte è $1/6 \cdot 1/6 \cdot 5/6 \cdot 3 = 5/72$, che esca 3 volte $1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 = 1/216$, mentre che non esca è $5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 = 125/216$ (si può controllare che $25/72 + 5/72 + 1/216 + 125/216 = 1$).
Possiamo quindi trovare la vincita media 10€ $\cdot$ 25/72 + 20€ $\cdot$ 5/72 + 30€ $\cdot$ 1/216 – 10€ $\cdot$ 125/216 = –85€ / 108, cioè si ha una **perdita** di 79 € cent! e il gioco è favorevole a chi tiene il banco.

4) Il commerciante sbadato

Qualche giorno fa un commerciante ha ordinato 60 confezioni di una certa merce a 13,50 € per confezione. Si accorge solo oggi che per quella merce veniva applicato uno sconto del 20%, acquistando almeno 100 confezioni. Si accorda allora col fornitore per un nuovo ordine di altre 40 confezioni, scontate del 24%. La sua disattenzione gli ha allora procurato una perdita in percentuale:



A. del 10%
B. del 11%
C. del 12%
D. del 13% (°)

Moltiplicare per 13,50€ non serve a nulla visto che si deve calcolare una percentuale!
Il commerciante spende unitariamente 60 + 40·76/100 (sconto del 24%!) = 90,4, mentre se avesse subito ordinato 100 confezioni avrebbe speso 100·80/100 (sconto del 20%!) = 80. la perdita in percentuale è allora (90,4 – 80) / 80 = 10,4/80 = 0,13 = 13%

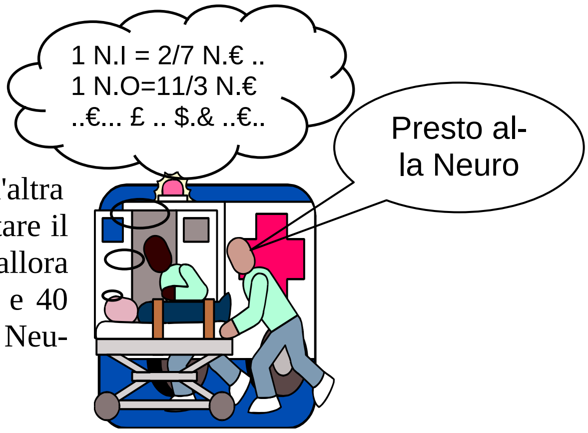
5) Le quattro scatole

Tre scatole identiche contengono rispettivamente cioccolatini al latte, cioccolatini fondenti e cioccolatini misti (identici ai primi, ma sia al latte che fondenti); vi è pure una scatola di caramelle identica alle precedenti. Sui coperchi c'è scritto "latte", "fondenti", "misti" e "caramelle", ma per errore sono stati tutti scambiati, per cui nessuno indica il contenuto esatto. Per conoscere il contenuto di tutte e quattro le scatole è possibile estrarre da qualcuna di esse qualche cioccolatino (o caramella), senza guardare all'interno. Qual è il minimo numero di estrazioni da effettuare per essere certi del contenuto?

A. 3
B. 4
C. 5
D. Nessuna delle precedenti risposte è esatta (°)

Se si pesca dalla scatola che riporta sul coperchio **misti** un cioccolatino fondente, sappiamo che questa contiene cioccolatini fondenti; pescando poi da quella che riporta sul coperchio cioccolatini **al latte** un cioccolatino, quest'ultima ha cioccolatini misti, quella con scritto caramelle cioccolatini al latte e quella con scritto cioccolatini fondenti caramelle. Analogamente valgono gli altri casi, quindi bastano solo 2 estrazioni, per cui la risposta esatta è D.

6) Ancora Mathemandia



Nel paese di Mathemandia si cambia il sistema valutario: viene introdotto il New Euro, o Neuro, che esiste come moneta e come biglietto di banca. Nel sistema Neuro vi è un'altra moneta, il Neur-Ino, che vale 2/7 di Neuro e un'altra banconota, il Neur-One, che vale 11/3 di Neuro. Per facilitare il cambio da Euro a Neuro (un Neuro = 50 € cent), viene allora venduto per 50 € un "Neuro-Kit", formato da 60 monete e 40 banconote. Quanti banconote da un Neur-One contiene un Neuro-Kit, sapendo che ne esiste almeno una?

A. 1
B. 15 (°)
C. 21
D. non si può stabilire, non sapendo il numero dei Neuro e/o dei Neur-Ini presenti nel kit.

Un Neuro-Kit vale 50 € cioè 100 Neuro. Detto x il numero dei Neur-Oni y il numero dei Neur-Ini, z il numero dei Neuro di carta e w quello dei Neuro in moneta, abbiamo il sistema:

$x + z = 40$

$y + w = 60$

$11/3\, x + 2/7\, y + z + w = 100$

Sottraendo dall'ultima equazione le prime due otteniamo $8/3\, x - 5/7\, y = 0$, cioè $y = 56/15\, x$, dove y è intero, positivo e minore di 60. La frazione 56/15 si semplifica, se $x = 0$ (ma è escluso, perché vi è almeno un Neurone!), se $x = 15$ e $x = 30$ (poi basta perché $x < 40$!). Ma se $x = 30$ $y = 112 > 60$, quindi l'unica soluzione è $x = 15$, cioè la B.