Gran Premio di Matematica - Edizione 2003

2 Manche

FINALE DELLA GARA MATEMATICA

Problemi aperti

1) Ancora l'ambulante

L'ambulante dello scorso anno, che vende "**TUTTO A 5 €**", si è ingrandito e ora ha due soci. Ad una sagra paesana, nelle tre bancarelle, essi vendono le lampadine **Lux Tarok**®, di lunga durata e basso consumo, in sacchetti preconfezionati contenenti 7 pezzi ciascuno, sempre a 5 € per confezione. All'inizio della giornata le tre bancarelle hanno rispettivamente 50, 30 e 10 lampadine. A fine giornata, smontate le bancarelle, ciascun socio vende singolarmente tutte le lampadine avanzate ad un prezzo unico, fissato dal capo, ma notevolmente maggiorato. Sapendo che i tre ambulanti incassano comunque la stessa somma dalla vendita di tutte le lampadine, qual è stato il prezzo fissato dal capo?

Posto x, y, z il numero delle confezioni di lampadine vendute dalle 3 bancarelle, le lampadine avanzate sono rispettivamente: $50 - 7x$, $30 - 7y$ e $10 - 7z$. Esse vengono vendute tutte allo stesso prezzo w (fissato dal capo in Euro), incassando rispettivamente e complessivamente (ogni confezione è venduta a € 5): $w(50 - 7x) + 5x$, $w(30 - 7y) + 5y$ e $w(10 - 7z) + 5z$. Si ha quindi il sistema:

$$\begin{cases} w(50-7x)+5x = w(30-7y)+5y \\ w(30-7y)+5y = w(10-7z)+5z \end{cases}$$

Sviluppando ed eliminando w si ottiene: $x = 2y - z$
Le incognite sono tutte **intere** (tranne eventualmente w, che può essere in € *cent*!) e **non negative**, quindi, tenuto conto che pure le lampadine avanzate non possono essere negative, z è 0 oppure 1, $0 \le y \le 4$ e infine $0 \le x \le 7$.
Posto $z = 0$, si ha $x = 2y$, da cui sostituendo in una delle equazioni del sistema si trova: $w = \dfrac{5y}{7y-20}$

con $7y - 20 > 0$, quindi $y = 3$ e $x = 6$ (non è $y = 4$, perché altrimenti sarebbe $x = 8$) e le lampadine vengono vendute a w = **15 €**.

Posto $z = 1$, si ha $x = 2y - 1$, da cui sostituendo nello stesso modo di prima si trova: $w = \dfrac{5y-5}{7y-27}$

con $7y - 27 > 0$, quindi $y = 4$ e $x = 7$ (non è $y = 0$, perché altrimenti sarebbe $x = -1$) e le lampadine vengono vendute sempre a w = **15 €**.
Si potrebbe pensare che il problema abbia **due** soluzioni: $x = 6$, $y = 3$, $z = 0$, $\boldsymbol{w = 15}$ con un incasso totale per ogni socio di € 150, oppure $x = 7$, $y = 4$, $z = 1$, $\boldsymbol{w = 15}$ con un incasso totale per ogni socio di € 50; invece la domanda è "*qual è stato il prezzo fissato dal capo*?", con l'unica soluzione $\boldsymbol{w = 15}$**!**

Nota: Il problema può anche essere risolto esaustivamente, ma occorre effettuare: **2** tentativi per z ($0 \le z \le 1$), **5** per y ($0 \le y \le 4$) e **8** per x ($0 \le x \le 7$), cioè in tutto **80**. Il **modo più semplice** rimane comunque supporre che i tre soci **vendano il massimo** delle confezioni, avanzando rispettivamente 1, 2 e 3 lampadine. Poiché l'**equazione multipla** $35 + w = 20 + 2w = 5 + 3w$ è soddisfatta per $\boldsymbol{w = 15}$, abbiamo una soluzione (anche se non è assicurata l'unicità!).

2) Dal film *A Beautiful Mind* (Ron Howard, Oscar 2002)

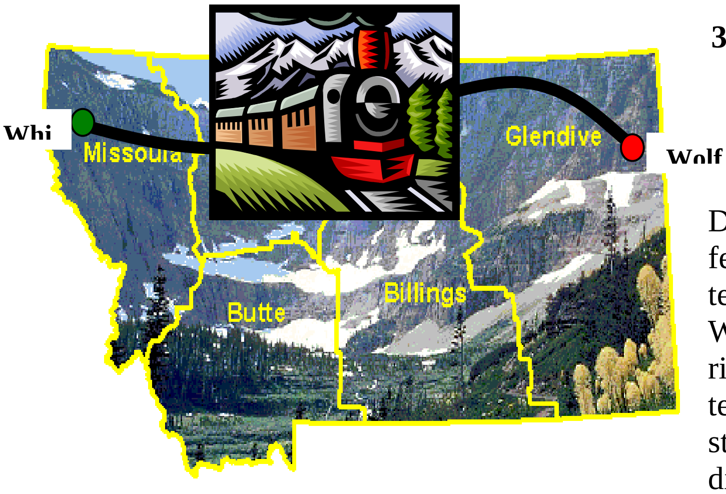
Lo schizofrenico professor John Nash, premio Nobel 1994 per le sue teorie economiche, sta passeggiando con la sua nipotina all'interno del dipartimento di matematica di Princeton dove regna sovrana la competitività più brutale. Si avvicina il collega René Thom e lo sfida al seguente gioco le cui regole sono:

- la bambina pensa a due numeri interi maggiori di uno e, senza rivelarli, ne calcola la somma e il prodotto
- la bambina comunica a John la somma dei due numeri (ma non il prodotto) e comunica a Renè il prodotto dei due numeri (ma non la somma)
- vince chi indovina per primo i due numeri.

John afferma: "*Tu non puoi indovinare i 2 numeri*".
Renè conferma: "Difatti non li so".
A questo punto John Nash afferma con sicurezza "*Ora so quali sono*!" e li rivela.
Descrivete un procedimento per stabilire quali sono i 2 numeri pensati dalla bambina e determinateli anche voi.

Detti x e y i due numeri, Renè, che conosce il prodotto $x \cdot y$, sarebbe favorito e indovinerebbe subito i due numeri, se essi fossero **primi** ($x = p_1$ e $y = p_2$), oppure anche un numero primo e il suo quadrato ($x = p$ e $y = p^2$) . Ma John conosce una somma ($x + y = s$) che, considerando la sua affermazione "*Tu non puoi indovinare i 2 numeri*", non può permettere questo caso.
Il minimo di tale somma (**dispari**, perché un numero pari > 2 è sempre la somma di 2 numeri primi!) è $s = 11$ (2+9=3+8=4+7=5+6=11), mentre il successivo non è 13 (2+11=13, *due primi*!) e nemmeno 15 (2+13=15, *due primi*!), ma $s = 17$ (2+15=3+14=4+13=5+12=6+11=7+10=8+9).
Un altro numero è 23 oppure 27, cioè tutti i dispari del tipo $s = n + 2$ con n (dispari) **composto**.
Anche Renè (pure lui esimio matematico) sa ricavare questa legge, ma purtroppo il prodotto (che conosce) non è $18 = 2 \cdot 9$, $24 = 3 \cdot 8$ o $28 = 4 \cdot 7$, bensì $30 = 5 \cdot 6$, ma è pure $30 = 2 \cdot 15$ e 2+15 = 17 è sempre un numero di quel tipo e a questo punto non può che rispondere "*Difatti non li so*". L'ultima affermazione di Nash "*Ora so quali sono*!", non fa altro che confermare (**anche a noi**, ma non a Renè, visto che non aveva ancora risposto!) che la somma, da lui conosciuta, **è proprio $\boldsymbol{s = 11}$**, quindi $\boldsymbol{x = 5}$ e $\boldsymbol{y = 6}$.

Nota: Per noi è importante l'ultima affermazione di Nash, infatti con $s = 17$, oltre a $30 = 2 \cdot 15$ si ha pure $42 = 3 \cdot 14$, ma è anche $42 = 2 \cdot 21$ e 2+21 = 23 è, come abbiamo detto prima, è un numero di quel tipo! Inoltre teniamo presente che poi i numeri diventano sempre più grandi....... troppo per farli moltiplicare (e sommare) a una bambina.......!



3) La ferrovia del West

"Lassù nel Montana fra mandrie e cowboy ...
c' è sempre un trenino fatto tutto da noi....."

Due squadre di pionieri dell'800 costruiscono una ferrovia di 1530 km che unisce Wolf Point a Whitefish, nel Montana. La prima squadra parte da Wolf Point ed è in grado di allestire 7 Km di binari al giorno, invece la seconda, che parte da Whitefish, è più veloce e fa 11 km al giorno. E' previsto che le due squadre lavorino lo stesso numero di giorni, compreso i festivi. Purtroppo la prima squadra dopo quasi due mesi ininterrotti deve sospendere il lavoro a Fort Dead per attacchi degli indiani, mentre la seconda perde diversi giorni lavorativi a causa di frane, neve, inondazioni ecc., per cui terminati i giorni prefissati si ferma a Deadfull Pass , molto lontano dalla prima. Pacificato il territorio e tornato il bel tempo le due squadre riprendono a lavorare per i rispettivi giorni persi, ma in posizioni invertite: la squadra A parte da Deadfull Pass (dove aveva terminato la B) e la B da Fort Dead (dove aveva terminato la A). In questo modo si incontrano esattamente ad Anaconda Falls, esattamente a metà percorso. Determinate quanti giorni aveva perso la squadra B nella prima parte della costruzione della linea ferroviaria.

Le due squadre assieme allestiscono 18 km di ferrovia al giorno, per cui il tempo previsto è 1530/18=85 giorni. Dai dati del problema si deduce che la squadra A lavora x giorni (< 62) e la squadra B y giorni (< 85), quindi allestiscono $7x + 11y$ km di ferrovia e devono ancora lavorare rispettivamente $85 - x$ giorni e $85 - y$ giorni. Poiché si scambiano di posizione e terminano esattamente a metà percorso (765 km), abbiamo l'equazione $7x + 11(85 - y) = 765$, cioè $11y - 7x = 170$. La soluzione di questa equazione non ha bisogno di tanti tentativi: per $x = 61$ e $x = 60$, y non è intera; per $x = 59$ si trova $y = 53$, per cui i giorni persi dalla squadra B sono stati $85 - 53 =$ **32**.

Nota: La stessa equazione si ottiene facendo $11y + 7(85 - x) = 765$. Inoltre tutte le soluzioni (intere e positive!) sono del tipo $x = 59 + 11t$ e $y = 53 + 7t$, dove t è un **numero intero** con le condizioni: $0 < 59 + 11t < 62$ e $0 < 53 + 7t < 85$, cioè $-5 \leq t \leq 0$. Tuttavia già ponendo $t = -1$, si ha $x = 48$, ma 48 giorni non sono circa due mesi, per cui l'unica soluzione si ottiene per $t = 0$.

4) Ancora lo zio Pit

Lo zio Pit si ingrandisce: compra altri due terreni di 24 e 21 ettari coltivati rispettivamente a frumento e a granoturco. Il prossimo anno vorrebbe coltivarvi pure le patate, ma lo spazio da destinare a questa cultura non può superare il 25% del primo terreno e 1/3 del secondo. Inoltre la superficie da destinare ai cereali deve essere almeno di 35 ettari. Sapendo che il ricavo medio per ettaro è di 800 € per il frumento, 1.100 € per il granoturco e 1.500 € per le patate, quanti ettari dei due campi deve destinare alla cultura delle patate e quanto potrebbe essere il ricavo complessivo?

Detti x gli ettari destinati a frumento e y quelli destinati a granoturco, alle patate saranno destinati $24 - x$ ettari del primo terreno e $21 - y$ ettari del secondo terreno. I vincoli del problema sono allora $0 \le x \le 24$, $0 \le y \le 21$, $0 \le 24 - x \le 6$, $0 \le 21 - y \le 7$, $x + y \ge 35$, riducibili al sistema:

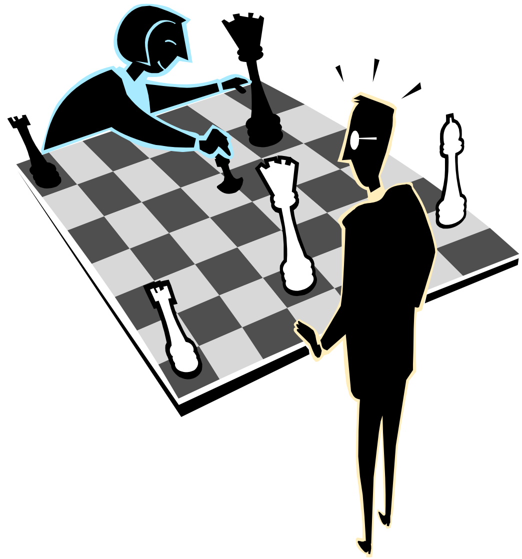
$$\begin{cases} 18 \le x \le 24 \\ 14 \le y \le 21 \\ x + y \ge 35 \end{cases}$$

Esso, nel piano cartesiano, rappresenta il pentagono di vertici A(24; 14), B(24; 21), C(18; 21), D(18; 17) ed E(21; 14). E nei vertici di tale pentagono si trovano gli estremi (max e min) di ogni funzione lineare.

Ovviamente Pit vuole massimizzare il guadagno e quindi il ricavo totale, che, sulla base dei dati è $r = 800\,x + 1100\,y + 1500\,(45 - x - y)$; riducendo l'equazione si ha $r = 67.500 - 700\,x - 400\,y$.
Il massimo è allora in D(18; 17), quindi deve destinare alle patate nel primo campo 24 – 18 = **6 ettari** e nel secondo campo 21 – 17 = **4 ettari**. Il ricavo complessivo sarà allora:

$$r = 67.500 - 700 \cdot 18 - 400 \cdot 17 = \mathbf{48.100}.$$

5) La famiglia De Scacchis



Nella famiglia De Scacchis, Paolo, Pietro, Anna e Chiara sono accaniti giocatori di scacchi.
Sappiamo che:

- Pietro e Chiara sono figli di Paolo
- Anna è sorella di Paolo
- Il gemello del miglior giocatore e il peggior giocatore sono di sesso opposto
- Il migliore ha la stessa età del peggiore

Chi è il migliore ?

A. Paolo
B. Pietro
C. Anna
D. Chiara (°)
E. Non si può stabilire, essendovi più possibilità

Paolo, il padre, può essere gemello solo di Anna (sua sorella!), ma i gemelli potrebbero essere solo i suoi figli (Pietro e Chiara), i quali hanno comunque un'età inferiore al padre; con questa premessa:

- Paolo non è il migliore, perché sua sorella (gemella!) non sarebbe la peggiore e quindi non può avere la stessa età di uno dei figli
- Nemmeno Anna è la migliore per la stessa ragione
- Rimangono Pietro e Chiara che sono di conseguenza gemelli
- Pietro non è il migliore perché altrimenti Paolo sarebbe il peggiore, ma non può avere la stessa età del padre
- Quindi è Chiara la migliore e sua zia Anna (la peggiore) è coetanea sua e di suo fratello!

6) Il signor N.N., giocatore accanito

N.N. gioca diverse partite a "*testa o croce*" e ogni volta punta **un ennesimo** ($1/n$, con n fissato da N.N. e costante in tutte le partite) di quello che ha in quel momento. Il 16 del mese scorso ha avuto lo **stesso numero di volte** la sorte favorevole e la sorte contraria.

Allora la vincita totale di quel giorno:

A. E' positiva (ha guadagnato)
B. E' negativa (ha perso) (°)
C. E' nulla (è rimasto pari)
D. Ha un segno che dipende da n
E. Ha un segno che dipende dal numero delle volte che gioca

Quel giorno ha certamente perso perché se inizialmente ha una somma C, per ogni n si ha:
$C+C/n - (C+C/n)/n = C - C/n^2 < C$ (prima vince e poi perde) oppure
$C-C/n + (C-C/n)/n = C - C/n^2 < C$ (prima perde e poi vince).

7) La gabella

Lo stato federale di Neurolandia è diviso in due regioni Rossilia e Verdania, separate dal fiume Pago. Quando si attraversa il fiume sull'unico ponte si deve pagare una tassa del 10% delle merci o dei valori trasportati. Un Rossiliano vuol vendere un carico di pesche in Verdania; attraversa il Pago e lascia il 10% delle pesche ai gabellieri, vende solo la metà della merce, riattraversa il Pago ed esborsa il 10% dell'incasso e ancora il 10% delle pesche avanzate. Per fortuna vende in Rossilia la frutta rimasta a € 3,24 al chilo. Si accorge così che, se fosse rimasto a casa sua, avrebbe incassato globalmente la stessa somma, risparmiandosi la fatica del viaggio. A quanto ha venduto un Kg di pesche in Verdania?

A. € 4,32
B. € 4,54
C. € 4,76 (°)
D. € 4,84
E. nessuna delle precedenti

Siano x i kg di pesche iniziali, allora ha venduto in Verdania 9/20 x (cioè 1/2 di x – 10%x)e in Rossilia 81/200 x (cioè 9/20x – 10%·9/20x). Detto y il prezzo di vendita in Verdania, il Rossiliano incassa in tutto 9/20·x·y – 9/20·x·y 10% + 81/200·x·3,24 = 81/200·x·(y + 3,24). Abbiamo allora l'equazione 81/200·x· (y + 3,24) = 3,24·x . Eliminata la x si trova y = 4,76, cioè la C.
Si poteva risolvere più facilmente pensando che attraversando due volte il Pago la tassa complessiva (su merce o Euro non importa) era del 10% + 10%·90% = 10%+9% = 19%. L'incasso netto è quindi solo dell'81% = 81/100. Metà di questo incasso (81/200) è realizzata in Verdania e metà in Rossilia da cui l'equazione relativa a un Kg di prodotto 81/200·(y + 3,24) = 3,24 che ci dà lo stesso risultato.

8) Dolcetto o scherzetto

E' la notte di Hallowe'en e quattro fratellini Bea, Francy, Nora e Paolo hanno raccolto un certo numero di dolcetti. Tornati a casa decidono, data l'ora tarda, di dividerseli il giorno dopo, lasciando i dolcetti in un mucchio sul tavolo della cucina. Ma durante la notte......... accadono i seguenti fatti:

- Bea, rimasta sveglia, aspetta che tutti dormano, poi va in cucina, divide i dolcetti in 4 parti uguali e, visto che avanza un cioccolatino, se lo mangia, nasconde la propria parte, ricompone il mucchio sul tavolo e torna a dormire.
- Francy si sveglia un'ora dopo, va in cucina, divide i dolcetti avanzati in 4 parti uguali e, visto che avanza una caramella, se la mangia, nasconde la propria parte, ricompone il mucchio sul tavolo e torna a dormire.
- Anche Nora si sveglia nel cuore della notte, va in cucina, divide i dolcetti avanzati in 4 parti uguali e, visto che avanza un lecca-lecca, se lo mangia, nasconde la propria parte, ricompone il mucchio sul tavolo e torna a dormire.
- E' quasi mattino e anche Paolo fa la stessa cosa: va in cucina, divide i dolcetti avanzati in 4 parti uguali e, visto che avanza un dolcetto, se lo mangia, nasconde la propria parte, ricompone il mucchio sul tavolo e torna a dormire!

Il mattino dopo i quattro fratellini vanno in cucina e si dividono esattamente i dolcetti rimasti sul tavolo, e, visto che non ne avanza nessuno, non hanno motivo di litigare e tornano felici a giocare......
Qual è il numero minimo di dolcetti che avevano raccolto quella notte, in modo che sia stata possibile quell'iniqua divisione?

A. meno di 250
B. fra 250 e 500
C. fra 501 e 750
D. fra 751 e 1000
E. più di 1000

Detto x il numero dei dolcetti raccolti, B, F, N e P le parti sottratte durante la notte da Bea, Francy, Nora e Paolo, e, infine, y il numero dei dolcetti della divisione equa del mattino, abbiamo le equazioni:

$$x = 4B + 1,\ 3B = 4F + 1,\ 3F = 4N + 1,\ 3N = 4P + 1 \text{ e } 3P = 4y$$

Eliminando B, F, N e P , si trova l'equazione di primo grado $81x - 1024y = 525$, le cui soluzioni minime intere sono $x =$ **765** e $y = 60$. Esse si trovano facilmente, perché ricavando la x si ha:

$$x = \frac{1024y + 525}{81}$$

essendo poi 525 divisibile per 3, la y deve essere necessariamente uno di questi numeri: 6, 15, 24, 33, 42, 51, **60**, 69, 78, ... e $y = 60$ è il primo che ci dà un risultato per x intero.

Nota: vi sono comunque **infinite** soluzioni tutte del tipo $x = 765 + 1024\,t$ e $y = 60 + 81\,t$, dove t è un **numero intero** (e il minimo si ottiene proprio per $t = 0$).

9) Golpe a Mathemandia

Il primo ministro di Mathemandia fa un colpo di stato: diventa Presidente della Repubblica, Governatore di tutte le Regioni, Prefetto di tutte le Provincie e Sindaco di tutti i Comuni...... Poiché nessuno deve essere "*suo Pari*" decreta di abolire dallo stato tutte le cifre pari, per cui i primi 10 numeri saranno: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 e 19 (e poi 31, 33, 35, 37, 39, 51, 53 e così via...). Allora, il suo stipendio, che prima del golpe era di 100.000 € (al giorno!), diventa di

A. 11.111.799 € (al giorno!)
B. 11.177.779 € (al giorno!)
C. 11.377.779 € (al giorno!)
D. 11.577.799 € (al giorno!)
E. 11.777.999 € (al giorno!)

Essendovi solo 5 cifre (le dispari!) occorre trasformare il numero 100.000 in base 5. Questo si fa facilmente prendendo i resti delle divisioni successive per 5 e ribaltandoli:

100.000 : 5 = 20.000 : 5 = 4.000 : 5 = 800 : 5 = 160 : 5 = 32 : 5 = 6 : 5 = 1 : 5 = 0 (fine)
(0) (0) (0) (0) (0) (2) (1) (1)

Quindi 100.000 = $11.200.000_5$. Ma la cifra 2 è stata abolita perché pari (sostituita dalla 3) e così pure la cifra 0 (anzi in questo sistema di numerazione lo "zero" non può essere espresso!). Nulla vieta però di definire lo zero come operazione 1–1, ma tale differenza ha bisogno di un **riporto** di un'unità, quindi (partendo dal fondo di $11.200.000_5$):

$0 \rightarrow 9$, col riporto di 1

$0 \rightarrow 9 - 1$ (del riporto) = 7, col riporto di 1

0→9 – 1 (del riporto) = 7, col riporto di 1
0→9 – 1 (del riporto) = 7, col riporto di 1
0→9 – 1 (del riporto) = 7, col riporto di 1
2→3 – 1 (del riporto) = 1, senza riporto!

Il numero è allora proprio **$11.177.779_5$**

Problemi a risposta multipla (2 punti se esatta, –1 se sbagliata, 0 non data)

GRIGLIA DI CORREZIONE

5	6	7	8	9
D	B	C	D	B

INDICAZIONE PER I PROBLEMI APERTI

Per i problemi **1 e 2**, la soluzione esatta e discussa, ma senza l'indicazione della seconda possibilità (mancanza del sistema globale!) di soluzione, potrebbe arrivare a **4 punti** (su 7)

Per il problema **3** non vi sono altri modi per trovare la soluzione senza il sistema quindi se fatto bene 7 punti su 7

Per il problema **4**, la soluzione esatta e discussa, ma senza il modello del sistema vincolare (2 punti) e del grafico cartesiano (2 punti), potrebbe arrivare a **3 punti** (su 7)