



Gran Premio di Matematica - Edizione 2004

SOLUZIONI FINALE

PROBLEMI A RISPOSTA APERTA



1) L'ambulante "rischia tutto"

Il solito ambulante vende a 5 euro merce di poco valore e di scarsa qualità, che acquista per 3 euro. Ogni giorno realizza mediamente una vendita di 250 prodotti. Per incrementare i guadagni inserisce, in ogni confezione di merce, un biglietto che riporta una delle seguenti scritte:

- peccato: non hai vinto! riprova e sarai più fortunato
- puoi ritirare gratis un'altra confezione
- puoi ritirare gratis altre due confezioni
- puoi ritirare gratis altre cinque confezioni
- puoi ritirare gratis altre dieci confezioni

Su 100 biglietti stampati ve ne sono 20 premiati, per un totale di 47 confezioni gratuite; ovviamente i biglietti vincenti sono in numero decrescente rispetto all'ammontare dei corrispondenti premi vinti. Con questo sistema vende mediamente 850 confezioni di merce al giorno. Di quanto riesce a incrementare i guadagni, oppure di quanto sarà la perdita?

Senza i biglietti premio il guadagno medio giornaliero è di $\text{€}(5 - 3) \times 250 = \text{€}500$.
Occorre prima calcolare il numero dei biglietti premio che vi sono ogni 100.

$$\begin{cases} x + y + z + w = 20 \\ x + 2y + 5z + 10w = 47 \\ x > y > z > w > 0 \end{cases}$$

Detti x , y , z e w rispettivamente il numero dei biglietti da 1, 2, 5 e 10 confezioni gratuite abbiamo il sistema:
Sottraendo la prima equazione dalla seconda otteniamo l'equazione $y + 4z + 9w = 27$, la quale deve avere soluzioni intere e, dovendo rispettare l'ultima disuguaglianza, deve essere $w = 1$ (se fosse 2, z non la potrebbe rispettare), quindi $y + 4z = 18$, con $z > 1$; se fosse $z = 2$, sarebbe $y = 10$, da cui $x = 7$, ma così non risulta rispettata la disuguaglianza! Deve allora essere $z = 3$, $y = 6$, da cui $x = 10$.

A questo punto le probabilità di vincere sono rispettivamente del 10%, 6%, 3% e 1%, mentre non si vince nulla all'80%.
I guadagni dell'ambulante saranno allora $(5 - 3) \text{ €} = 2 \text{ €}$ all'80%, $(5 - 6) \text{ €} = -1 \text{ €}$ al 10%, $(5 - 9) \text{ €} = -4 \text{ €}$ al 6%, $(5 - 18) \text{ €} = -13 \text{ €}$ al 3% e $(5 - 30) \text{ €} = -28 \text{ €}$ all'1%, quindi in media, per 100 confezioni $(160 - 10 - 24 - 39 - 28) \text{ €} = 59 \text{ €}$.
Se ne deduce che, vendendo 850 confezioni, guadagna $59 \text{ €} \times 8,5 = 501,50 \text{ €}$ e allora per un **euro e mezzo** non vale nemmeno la pena di rischiare (e soprattutto di perdere tempo a risolvere il problema)!

2) Dal film "Il ponte sul fiume Kwai" - David Lean, 1957 (7 Oscar, fra cui la miglior colonna sonora!)

Durante la seconda guerra mondiale 140 soldati alleati, comandati dal colonnello inglese Nicholson (Guinness), sono internati in un campo di concentramento giapponese in Birmania. Devono costruire un ponte sul fiume Kwai, ma la costruzione non avanza di un metro, perché i reclusi continuano ad avere durissimi scontri, sia verbali che fisici, con i giapponesi e col capo del campo, il colonnello Saito (Haya-kawa). Dopo alcune settimane, che hanno portato a 4 morti e a 10 feriti gravi fra i prigionieri, Nicholson e Saito arrivano al seguente accordo:

- i feriti saranno immediatamente ricoverati in un ospedale della Croce Rossa;
- i prigionieri accettano di costruire il ponte, purché sia Nicholson a dirigere i lavori;
- i turni di lavoro saranno settimanali, quindi per tutta la settimana un numero prefissato di uomini si riposerà, dedicandosi alla cucina, all'orto, ecc.;
- il ponte avanzerà in media di 2 metri alla settimana per ogni uomo che lavora;
- ogni settimana vi sarà un ulteriore avanzamento dell'1% per ogni uomo che riposa.

Determinate quanti uomini devono riposare, in modo che il ponte sia terminato nel più breve tempo possibile, così da essere raso al suolo prima che finisca il film.....!

Tolti i morti e i feriti abbiamo 126 uomini validi per costruire il ponte.

Se settimanalmente ne riposano x , lavorano $126 - x$ facendo avanzare il ponte di $2(126 - x)$ metri alla settimana con però un ulteriore incremento di $2(126 - x)x / 100$, cioè in tutto $y = 2(126 - x) + (126 - x)x / 50$ ovvero

$$y = \frac{-x^2 + 26x + 12600}{50} \quad \text{equazione di una parabola, concava in basso e col vertice in } x = 13 \text{ e } y = 255,38.$$

Se riposeranno 13 uomini, ponte avanzerà al massimo di 255,38 m alla settimana e quindi sarà realizzato nel minor tempo possibile.



3) Le scarpriere del professor Matt

Il professor Matteo De Matt, docente di matematica, possiede solo 3 tipi di scarpe: mocassini, stringate e da trekking, tutte uguali, che ha acquistato in diverse paia, per 5 € al paio, dal solito ambulante. Poiché non le ripone mai in ordine, sua moglie, Norina Precisina, gli regala due scarpriere: in una mette tutte le destre e nell'altra le sinistre. Quando va a scuola, prende a caso una scarpa destra ed essendo perennemente con la testa fra i numeri, prende a caso pure la sinistra! Per fortuna, agendo in questo modo, è più facile che indossi scarpe uguali, piuttosto che spaiate: infatti il professore calcola in $7/13$ la probabilità di non essere preso in giro. Qual è il minimo numero di scarpe contenuto nelle scarpriere?



Detto n il numero delle paia di scarpe, x e y quello di due tipi diversi, quelle del terzo tipo saranno $n - x - y$. Poiché x , y e $n - x - y$ sono sia il numero delle scarpe destre che quello delle scarpe sinistre, abbiamo l'equazione:

$$\frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{(n - x - y)^2}{n^2} = \frac{7}{13} \quad \text{dove } x > 1, y > 1, n > x + y + 1 \text{ e interi. Sviluppando l'equazione rispetto a } n \text{ si ottiene:}$$

$3n^2 - 13n(x + y) + 13x^2 + 13xy + 13y^2 = 0$, equazione complicata da risolvere esaustivamente.

Tuttavia, osservando l'equazione, si deduce che n deve essere un multiplo di 13, e, dovendo essere **minimo**, poniamo inizialmente $n = 13$ (e poi, eventualmente, $n = 26, 39, \dots$ ecc. ... "ma quante scarpe ha il professor Matt?!").

Ciò posto, riducendo, si ha $x^2 + xy + y^2 - 13(x + y) + 39 = 0$, che è un'equazione **simmetrica**, risolvibile facilmente ponendo $x + y = s$ (somma) e $xy = p$ (prodotto), ovvero $s^2 - 13s - p + 39 = 0$, da cui $p = s^2 - 13s + 39$.

Ponendo $s = 2$, si trova $p = 17$, che non è accettabile; $s = 3$, $p = 9$ (idem); $s = 4$, $p = 3$ da cui $x = 1$ e $y = 3$ (o viceversa).

Vi sono allora 1 paio di scarpe di un tipo, 3 di un altro tipo e $13 - 3 - 1 = 9$ del terzo tipo, per **un totale di 26 scarpe**.

Nota: si poteva risolvere l'equazione simmetrica immediatamente, provando a sostituire $x = 1$; e ci va bene! Infatti diventa $y^2 - 12y + 27 = 0$, cioè $y = 3$ o $y = 9$, risultati che portano alla stessa e unica conclusione.



4) Il barcaiolo ubriaco

Un barcaiolo sta risalendo il corso di un fiume con due fiaschi di vino: uno mezzo pieno e uno mezzo vuoto (infatti è già alquanto alticcio). Nel passare davanti a un pontile, vede una donna in attesa del vaporetto, allora si scola tutto il fiasco mezzo vuoto e lo ripone nella barca, dicendo "Signora, bevo alla sua salute!". Immediatamente butta il fiasco in acqua e riprende a risalire il fiume, mentre il fiasco, galleggiando, viene trascinato dalla

corrente. Dopo 40 minuti il barcaiolo ha ancora sete e, purtroppo, si accorge di aver buttato in acqua il fiasco mezzo pieno, quindi, immediatamente, con un colpo di remo, gira la barca e torna indietro per recuperarlo. Pur ubriaco, il barcaiolo rema sempre allo stesso ritmo dell'andata e riesce a raggiungere il fiasco alla distanza di 3 Km dal pontile. Lo recupera, smette di remare, si abbandona alla corrente, sorseggiando il vino rimasto e pensando al pericoloso corso e alla bella donna che ha incontrato..... Dal momento del recupero passano 12 ore e il barcaiolo si ritrova nel mare a gustarsi l'alba del nuovo giorno....

Quanti chilometri percorre il vaporetto dal pontile al mare?

Detta x la velocità della corrente e v quella di remata ($> x$ e a ritmo costante!), la barca risalirà il fiume alla velocità $v - x$ e lo scenderà alla velocità $v + x$ (il tutto in km/h); 40 minuti sono $2/3$ di ora, quindi il barcaiolo risale il fiume percorrendo $2/3 (v - x)$ km, fino a quando si accorge di aver sbagliato a gettare il fiasco. Sapendo poi che il tempo (in ore) che trascorre dal momento in cui il barcaiolo perde il fiasco fino a quando lo raggiunge, uguaglia il tempo in cui il fiasco percorre i 3 km, abbiamo allora l'equazione:

$$\frac{2}{3} + \frac{2/3(v - x)}{v + x} + \frac{3}{v + x} = \frac{3}{x} \quad \text{che semplificata diventa} \quad \frac{v(4x - 9)}{3x(v + x)} = 0, \quad \text{da cui } v = 0 \text{ (non accettabile) oppure}$$

$x = 9/4$, cioè la velocità della corrente è 2,25 km/h.

Da quel punto la barca arriva al mare in 12 ore, quindi percorre 27 km e, trovandosi inizialmente a 3 km dal pontile, lo spazio percorso dal vaporetto è di 30 km.

nota: si poteva rendere più facile l'equazione pensando al barcaiolo fermo (cioè prendendo il sistema di riferimento con il barcaiolo nell'origine) e al fiume che scorre su di lui in entrambe le direzioni e a velocità diversa, essendo incrementata o decrementata dal ritmo di remata del barcaiolo; ma il tempo sia in una direzione che nell'altra è sempre lo stesso e uguale a 40 minuti. L'equazione è allora:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{x} \quad \text{da cui si trae immediatamente } x = 9/4 !$$

Ovviamente, tenuto conto che il tempo nelle due direzioni è sempre lo stesso (40 minuti!), si poteva anche evitare l'equazione, trovando solo la velocità del fiasco in acqua (che è quella della corrente!): il fiasco impiega 80 minuti ($4/3$ di ora) per percorrere 3 km, quindi la sua velocità è $3/(4/3)$ km/h = $9/4$ km/h.

PROBLEMI A RISPOSTA CHIUSA

5) La terra è mia!

Il grande Megaloni, dittatore dello stato di Methemandia, ha una visione! Sogna di possedere tutta la Terra e si fa confezionare un cavo del diametro di 3 m che possa circondarla all'equatore (si suppone che la terra sia perfettamente sferica e liscia). Di quanto deve essere più lungo dell'equatore terrestre affinché la possa veramente circondare?

- A. da 0 a 3 m
- B. da 3 a 10 m (°)
- C. da 10 a 100 m
- D. da 100 a 1000 m
- E. oltre 1 km

Detto R il raggio della Terra in metri (che non serve sapere!), tenuto conto che il raggio del cavo è $3/2 \text{ m} = 1,5 \text{ m}$, abbiamo: l'equatore $= 2\pi R$ e la lunghezza del cavo $= 2\pi(R+1,5) = 2\pi R + 3\pi$, quindi la differenza è $3\pi = 9,42 \text{ m}$, cioè la risposta **B**.

6) Il quadro conteso

Alcuni critici d'arte trovano in un antico convento un quadro, che non sanno se attribuire a Giotto o a Raffaello oppure alle rispettive scuole. Tuttavia compare l'iscrizione, sotto riportata, fatta dall'autore. Sappiamo che Giotto e gli artisti della sua scuola dicono sempre la verità, mentre Raffaello e i suoi artisti mentono sempre! Da chi è stato realizzato il quadro?

- A. da Giotto
- B. da Raffaello
- C. dalla scuola di Giotto (°)
- D. dalla scuola di Raffaello
- E. non abbiamo informazioni sufficienti per deciderlo



Questo quadro non è
stato realizzato da
Giotto!

Di certo il quadro non è di Raffaello o della sua scuola, perché essi mentono sempre, per cui la scritta sarebbe vera; ciò che è scritto è allora vero, quindi non è stato realizzato da Giotto, ma dalla sua scuola. La risposta è dunque **C**.

7) BUM a Mathemandia

Anche nello Stato di Mathemandia si fanno le gare del "BUM". Pochi giorni fa, il dittatore dello Stato, ha subito un grave attentato: mentre gridava "BUM", gli hanno sparato, ma, per fortuna, ha perso solo l'indice della mano destra, ovvero il settimo dito! Non potendo più contare in "base 10", decreta che, da tutto lo Stato, sia abolita la cifra 7, per cui il sistema di numerazione sarà in "base 9", con le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

In questo sistema, qual è il risultato della moltiplicazione 69×96 ?

- A. 6464
- B. 6504
- C. 6563 (°)
- D. 6565
- E. 6584

Mancando il 7, 69 nella base 9 corrisponde a 68_9 , che in base 10 è $6 \times 9 + 8 = 62$, analogamente 96 corrisponde a 86_9 , che in base 10 è $8 \times 9 + 6 = 78$. Basta allora trasformare $62 \times 78 = 4.836$ in base 9, cioè 6563_9 , che non necessita di trasformazioni essendo le cifre inferiori a 7. La risposta è dunque **C**.

Nota: In maniera più semplice si possono considerare solo le "unità", quindi 9×6 equivale a $8_9 \times 6_9 = 8 \times 6 = 48 = 53_9$, cioè il risultato deve finire per 3, quindi è 6563_9 !



8) Bianchi o Neri?

In una classe di un ITIS vi sono solo 3 femmine, Nora, Susy e Chiara e due sono sorelle. Appartengono a due famiglie: la famiglia Bianchi e la famiglia Neri. Una delle due famiglie dice sempre la verità, l'altra mente sempre. Nora afferma: "Susy non è mia sorella!" e Chiara risponde: "Infatti è la mia!". Allora:

- A. Chiara si chiama Neri
- B. Susy è sorella di Chiara
- C. Bianchi è la famiglia che mente
- D. Nora dice la verità
- E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta (°)

Se Nora dice il vero, Susy non può essere sua sorella, ma nemmeno Chiara, perché fa un'affermazione falsa (le sorelle sono solo 2!); se Nora dice il falso allora è sorella di Susy, ma in tal caso Chiara direbbe il vero e si giunge alla stessa contraddizione! Nessuna delle affermazioni A-D è allora corretta, quindi la risposta è **E**.

9) Il triangolo diviso

Un triangolo scaleno ha i lati rappresentati da 3 numeri interi consecutivi e una mediana lo divide in due triangoli isosceli. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

- A. Il perimetro del triangolo è maggiore di 10 (unità)
- B. L'area del triangolo è minore di 10 (unità quadrate)
- C. La mediana che divide il triangolo è maggiore di 3 (unità) (°)
- D. Le tre altezze sono tutte maggiori di 2 (unità)
- E. Il perimetro del triangolo è minore di 13 (unità)

Il triangolo è rettangolo: infatti la mediana che lo divide in due triangoli isosceli deve essere uguale alla metà del lato diviso da essa. L'unico triangolo rettangolo con i lati formati da 3 numeri consecutivi ha i cateti che misurano 3 e 4 e l'ipotenusa 5. La mediana in questione misura allora 2,5 per cui è falsa la risposta **C** (il perimetro è 12, l'area 6 e le tre altezze sono 3, 4 e 2,4).

10) I "quattro dell'Ave Maria"

Antonio, Carlo, Franco e Michele sono avvocato, ingegnere, medico e professore, ma non nell'ordine indicato. Sappiamo che:

- Michele ha sposato Ave, la sorella dell'ingegnere, che a sua volta ha sposato Maria, la sorella del medico
- Franco è figlio unico, è scapolo ed è molto amico del professore
- Carlo è amico del fratello dell'ingegnere ma non conosce nessuno dei suoi parenti

Chi sono, nell'ordine, l'avvocato, l'ingegnere, il medico ed il professore?

- A. Franco, Antonio, Carlo e Michele
- B. Antonio, Franco, Carlo e Michele
- C. Franco, Carlo, Antonio e Michele
- D. Franco, Michele, Antonio e Carlo
- E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta (*)

Michele non è ingegnere, avendo sposato Ave, sua sorella; ma nemmeno Franco è ingegnere (e neppure medico) essendo figlio unico, allora non può che essere avvocato (infatti non è professore, che è suo amico!); anche Carlo non è ingegnere, quindi per esclusione l'ingegnere è Antonio; ma Carlo non può essere medico (altrimenti l'ingegnere che ha sposato Maria sarebbe sua cognato e dunque lo conoscerebbe!), di conseguenza è professore; rimane quindi Michele che è medico.



La soluzione tabellare è ovviamente più esplicativa e immediata, basta mettere "o" negli incroci impossibili e, quando si inserisce la risposta corretta "x" si escludono tutte quelle della stessa riga e colonna; si ottiene allora:

	avvocato	ingegnere	medico	professore
Franco	x	o	o	o
Carlo	o	o	o	x
Michele	o	o	x	o
Antonio	o	x	o	o

In A-D non è presente la quaterna richiesta, quindi la risposta è **E**.