GARA 2005 – domande e risposte

Quesiti a risposta aperta

1) L'ambulante….è fallito!

Dopo 4 anni di vendite (abusive!) il nostro ambulante è fallito! I tre creditori, Stroz Zino, Usur Aio e Cravat Taro, gli sequestrano merce e automezzi e se li spartiscono equamente. Ha trenta furgoni uguali (dello stesso valore commerciale), di cui 9 pieni di merce di prima qualità, 9 pieni di merce di seconda qualità e 12 vuoti. Non hanno tempo di visionare o scaricare la merce (la Finanza incombe!), però stimano che la merce di prima qualità valga il triplo rispetto alla seconda. Aio è disposto a ritirare il massimo numero di furgoni (ma non tutti!) con la merce di qualità inferiore. Determinate in quale modo Zino, Aio e Taro si dividono i beni del fallimento.

I 9 furgoni pieni di merce di prima qualità valgono il triplo degli altri 9, sono allora equivalenti a 27 furgoni di qualità inferiore; secondo questo criterio, devono essere equiripartiti (oltre ai vuoti) 27+9 = 36 furgoni di qualità inferiore (potenziali), quindi a ognuno dei creditori ne spettano 12 (anche se in realtà ciascuno ne ottiene in tutto 30:3=10). Detto x, y, z il numero di furgoni pieni di merce di prima qualità ottenuti dai tre creditori, si ha la tabella:

Creditori	**furgoni prima**	**furgoni seconda**	**furgoni vuoti**	**totale**
Zino	x	$12-3x$	$2x-2$	**10**
Aio	y	$12-3y$	$2y-2$	**10**
Taro	z	$12-3z$	$2z-2$	**10**
totale	**9**	**9**	**12**	**30**

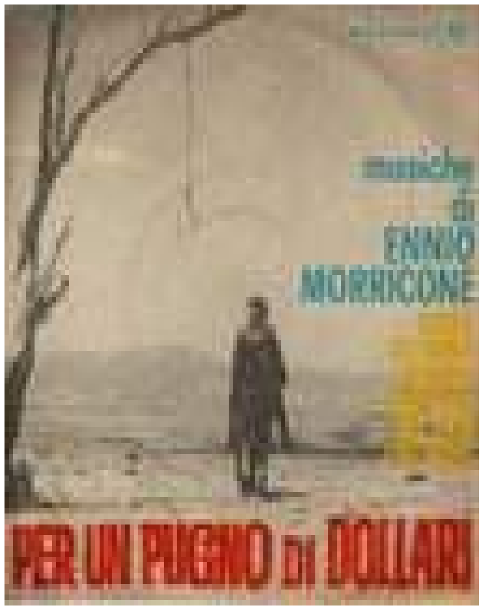
Da essa ricaviamo l'unica equazione $x+y+z=9$, con radici ovviamente intere, che è verificata in tutte le colonne; le condizioni di non-negatività di ogni cella ci forniscono le limitazioni: $1 \le x \le 4$, $1 \le y \le 4$ e $1 \le z \le 4$; inoltre la condizione MAX$=12-3y$ e la limitazione $12-3y \le 8$ (perché Aio ne vuole il massimo, ma non li vuole tutti), risultano verificate per $y=2$.
Le soluzioni sono allora $x = 3$, $y = 2$ e $z = 4$, oppure $x = 4$, $y = 2$ e $z = 3$, cioè le due possibili tabelle:

Creditori	**furgoni prima**	**furgoni seconda**	**furgoni vuoti**	**totale**
Zino	3	3	4	**10**
Aio	2	6	2	**10**
Taro	4	0	6	**10**
totale	**9**	**9**	**12**	**30**

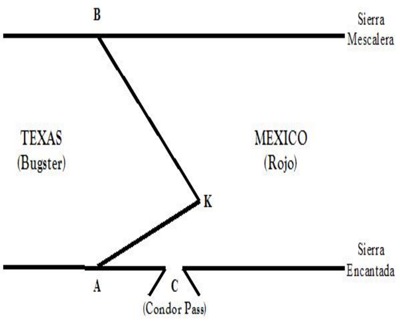
oppure:

Creditori	**furgoni prima**	**furgoni seconda**	**furgoni vuoti**	**totale**
Zino	4	0	6	**10**
Aio	2	6	2	**10**
Taro	3	3	4	**10**
totale	**9**	**9**	**12**	**30**

2) Dal film "Per un pugno di dollari" (Sergio Leone '64, con Clint Eastwood e Gian Maria Volontè)

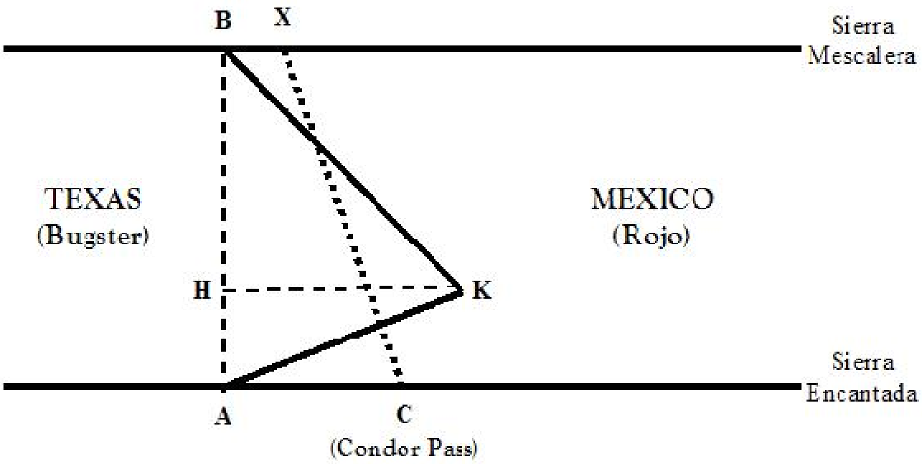


Due potenti famiglie, i Rojo e i Bugster, sono divise da un'acerrima rivalità per il controllo del contrabbando di armi e di alcool fra Messico e Stati Uniti. Il confine in comune (spezzata AKB) è in uno stretto cañon, limitato da due sierre parallele e impervie, dove l'unica via d'uscita per sfuggire ai Rangers e ai Carabineros, si trova a Condor Pass, nel territorio dei Rojo.



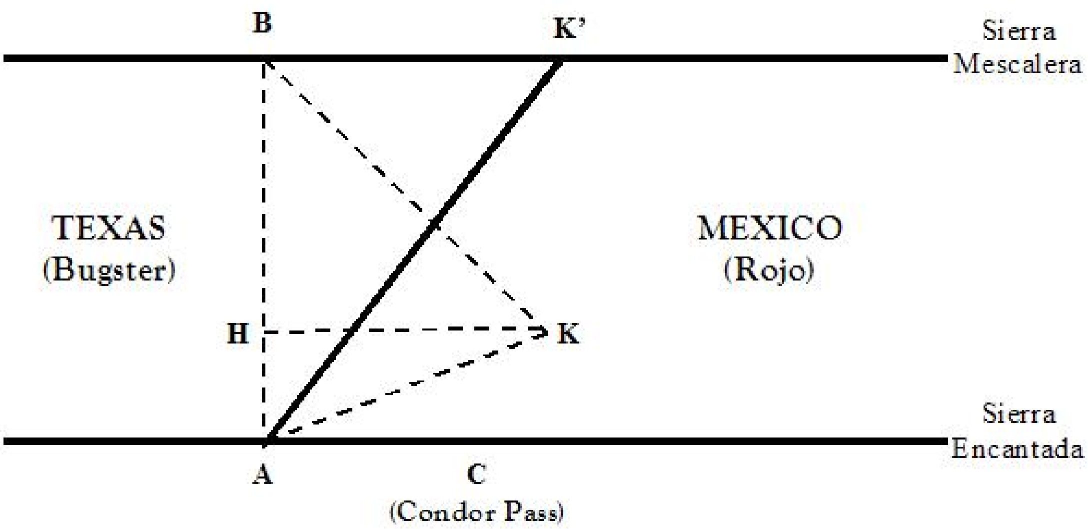
Un misterioso pistolero solitario (Eastwood), eroe cinico e spietato, cerca di arricchirsi mettendo le due famiglie una contro l'altra, approfittando degli sconfinamenti dei Bugster. Ciò ha prodotto un'orrenda carneficina che ha portato all'eliminazione dei Rojo…

Sarebbe bastato portare il confine a Condor Pass (segmento CX, nella sottostante cartina), evitando ogni spargimento di sangue!

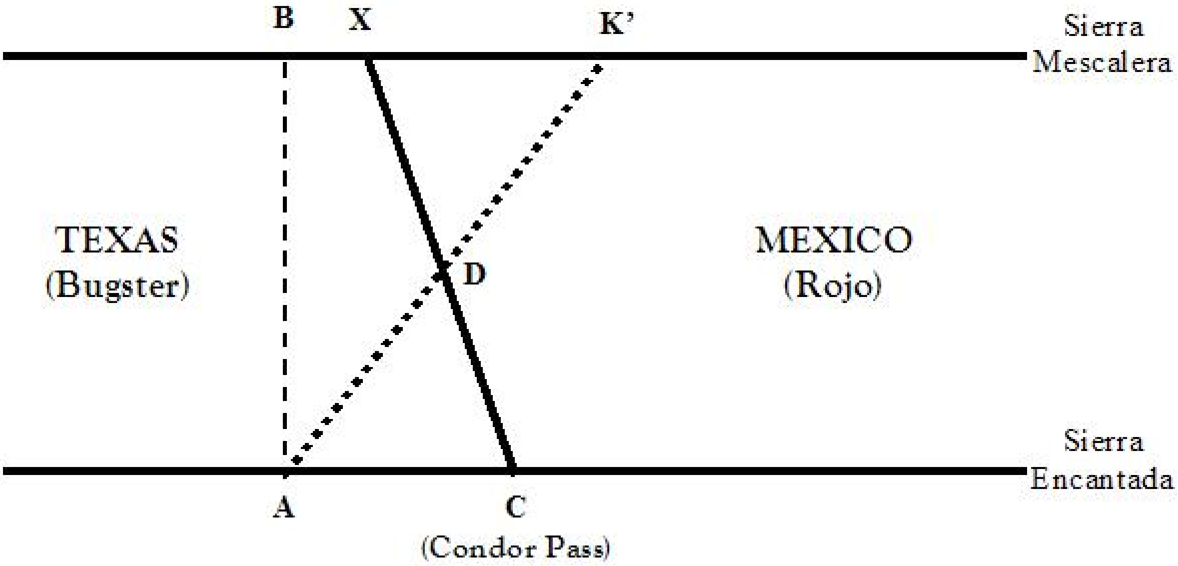


Sappiamo che:
AK = 15,3 miglia,
BK = 35,1 miglia,
HK = 13,5 miglia,
AC = 9,7 miglia.
A quale distanza da B deve essere spostato il confine, lasciando inalterate le aree dei due territori? (ovvero quanto misura BX in miglia?)

Non è necessario conoscere la larghezza del cañon (AB), infatti, per lasciare inalterata le aree dei territori, il triangolo AKB e il trapezio ACBX devono essere equivalenti, quindi AC+BX = HK, da cui BX = HK – AC = (13,5 – 9,7) miglia = 3,8 miglia.
Oppure, ricordando l'analogo problema della prima manche (n°11), si può rettificare il confine in due passaggi:
Si riporta prima la distanza HK parallelamente da B, ottenendo BK' = HK (=13,5 miglia); il nuovo confine AK' rispetta le condizioni, in quanto i triangoli AKB e AK'B hanno la stessa area (stessa base e altezza uguale).



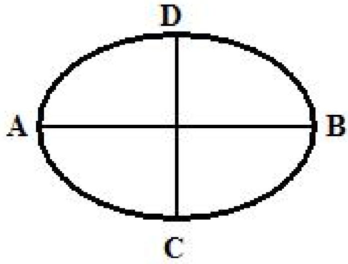
Ora si prende BX = BK’ – AC, infatti i triangoli ACD e XK’D sono uguali per il 2° criterio (e di conseguenza equivalenti), poiché hanno AC = XK’ e gli angoli uguali (alterni interni di rette parallele….).



Il nuovo confine rispetta le condizioni, quindi BX = (13,5 – 9,7) miglia = 3,8 miglia.

3) I TOP-petini del Grand Hotel

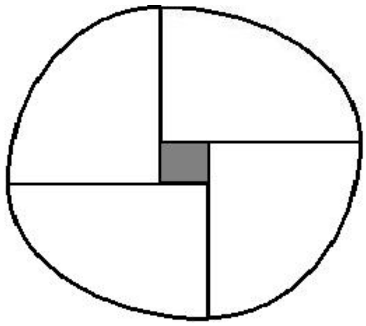
Un famoso Grand Hotel ha ristrutturato i bagni di tutte le camere, dotandoli di una doccia idromassaggio a base quadrata con lato di 105 cm e viene effettuato un ordine di 1.000 tappetini anti-scivolo rotondi.



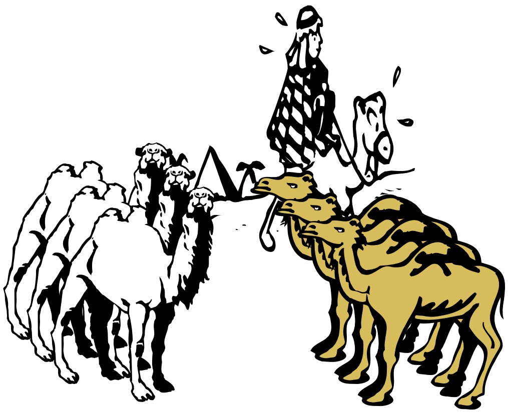
La ditta di materie plastiche produce, per errore, 1.000 tappetini ellittici di cm 120 x 80, che, ovviamente, sono rifiutati dal Grand Hotel.
(AB = cm 120, CD = cm 80)

Per fortuna nella ditta lavora un certo Matteo De Matt (il matematico che portava spesso le scarpe spaiate!) …..
De Matt riesce a modificare un tappetino, dividendolo in 4 parti e aggiungendo un piccolo quadrato di plastica, senza nessuno scarto e con una spesa minima di saldatura. Questo prototipo viene accettato dal Grand Hotel, e i 1000 tappetini, così modificati, poco più grandi e molto eleganti, sono venduti a prezzo maggiorato!
De Matt ottiene così un articolo in testa a tutte le vendite di tappetini, di originale designer: il TOP-petino!
Determinare la forma del TOP-petino e l'area del quadrato aggiunto.

Se si taglia l'ellisse lungo gli assi, si ricompongono le parti, come illustrato nella figura di destra. Il quadrato al centro ha lato cm (60–40) = 20 cm, quindi area 400 cm^2
Questo tappetino ci sta nel box doccia, infatti il suo "diametro" è minore di cm (60+40) = 100 cm < 105 cm



4) L’eredità dello smemorato



L’anziano emiro Math Tellhj’ decide di recarsi dal notaio Noth Telkhj’ per redigere il testamento a favore dei suoi numerosi figli. L’eredità consiste in 8.820 cammelli da dividere in parti uguali. Quando Noth gli chiede quanti sono i figli, Math risponde: “Mi ricordo solo che tutte le mie 12 mogli e 10 concubine hanno avuto almeno un figlio, però, essendo un bravo matematico, quando è nato il mio ultimo discendente, avevo deciso di dare al primogenito un certo numero x di cammelli e un n-esimo dei rimanenti, al secondo $2x$ e un n-esimo dei rimanenti, al terzo $3x$ e un n-esimo dei rimanenti, e così fino all’ultimo. In questo modo avrei ripartito equamente tutti i miei cammelli.” A questo punto il notaio gli chiede x oppure n, ma l’emiro non si ricorda nemmeno quelli.
Quanti sono i figli dell’emiro e quanti cammelli spettano a ciascuno?

Sia c (c = 8.820) il numero dei cammelli e f ($f \geq 22$) il numero dei figli. Per il primogenito abbiamo la facile equazione: $\frac{c}{f} = x + \frac{c-x}{n}$.

Per “generalizzarla” a tutti i figli, detto allora k il k-esimo figlio ($1 \leq k \leq f$), osserviamo che sono già stati ripartiti $(k-1)\frac{c}{f}$ cammelli, quindi abbiamo l’equazione: $\frac{c}{f} = kx + \frac{c-(k-1)\frac{c}{f}-kx}{n}$,

cioè $\frac{c}{f} = \frac{c(f+1)-k(f(n-1)x-c)}{nf}$ (notiamo che per k = 1 si ottiene la prima equazione).

Quest’ultima deve essere verificata per ogni k ($1 \leq k \leq f$), ovvero deve essere $f(n-1)x - c = 0$. Risolvendo la prima parte, $\frac{c}{f} = \frac{c(f+1)}{nf}$, si trova $f = n - 1$ e, con la seconda, $c = f(n-1)x = xf^2$.

Sappiamo che c = 8.820, ovvero scomposto in fattori, $c = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$.
L’equazione finale diventa allora: $xf^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$, con x e f interi, da cui le soluzioni $x = 5$ e $f = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$, $x = 2^2 \cdot 5 = 20$ e $f = 3 \cdot 7 = 21$ (non accettabile perché $f \geq 22$, x= ... e f = ... (altre 6 combinazioni non accettabili per la stessa ragione!).
In definitiva i figli sono 42 e a ciascuno spettano 8.820/42 = 210 cammelli.

5) L'investimento

Tizio deve investire 100.000 euro in 4 anni e ha 4 opportunità:
l'investimento A frutta il 2,5% all'anno per 4 anni
l'investimento B frutta l'1,1% il primo anno, il 2% il secondo, il 3% il terzo e il 4% il quarto
l'investimento C frutta il 4,1% il primo anno, il 3% il secondo, il 2% il terzo e l'1% il quarto
l'investimento D frutta 10.465 euro complessivi nei quattro anni.
Sapendo che i rendimenti sono netti e supponendo che il tasso di inflazione sia lo stesso nei quattro anni, determinate quale investimento è più conveniente.

Nei casi A, B e C gli interessi si capitalizzano ogni anno e il montante finale è rispettivamente:

A: € 100.000$(1+0,025)^4$ = € 110.381,29

B: € 100.000(1+0,011)(1+0,02)(1+0,03)(1+0,04) = € 110.464,29

C: € 100.000(1+0,041)(1+0,03)(1+0,02)(1+0,01) = € 110.461.13

di conseguenza gli interessi netti sono: € 10.381,29, € 10.464,29 ed € 10.461.13; l'investimento più conveniente è quindi D (anche se per pochi centesimi superiore a B!)

6) I due treni

Due treni partono contemporaneamente sulla linea a binario unico che unisce due città A e B, distanti fra loro 510 km. Il primo viaggia da A verso B alla velocità di 120 km/h, il secondo da B verso A a 150 km/h. Sapendo che il primo treno si ferma in una stazione intermedia C per far passare quello più veloce e lo attende per 15 minuti, quanto dista C da A?

Detta x la distanza AC (in km), i tempi (in ore) per raggiungere C sono rispettivamente x/150 e (510–x)/150; il primo treno attende il secondo 15 minuti (1/4 d'ora), quindi abbiamo l'equazione:

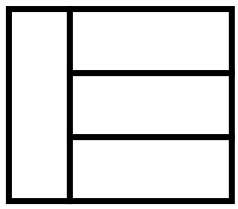
$\frac{x}{120}+\frac{1}{4}=\frac{510-x}{150}$, che risolta, ci dà x = 210 e la risposta è B.

7) **I bidoni di benzina**

Due bidoni cilindrici, pieni di benzina, hanno la stessa altezza. Il primo, del diametro di 30 cm, ne contiene 45 litri. Quanti litri ne contiene il secondo, sapendo che ha il diametro di mezzo metro?

I cilindri hanno la stessa altezza, quindi il loro volume è proporzionale al quadrato dei diametri. Abbiamo la proporzione $30^2 : 50^2 = 45 : x$, da cui x = 125 (risposta E)

8) I quattro rettangoli



I quattro rettangoli della figura sono perfettamente uguali.
Sapendo che l'area della figura è 75 cm^2, qual è il suo perimetro?

L'area di ogni rettangolo è 75/4 e un lato è triplo dell'altro; detta x la base, l'altezza è 3x e abbiamo l'equazione $3x^2 = 75/4$, cioè x = 5/2 = 2,5 (cm).
La figura ha la base di cm 10 e l'altezza di cm 7,5; il perimetro misura cm 35 = 3,5 dm e la risposta è C

9) Chi ha il motorino ?

Tre ragazzini Antonio, Bruno e Carlo stanno conversando:
Antonio: "Io non ho il motorino"
Bruno: "Nemmeno io ce l'ho e Antonio mente"
Carlo: "Io invece ce l'ho e Antonio dice la verità"
Sapendo che uno solo dei ragazzini ha dato la risposta falsa, chi di essi ha il motorino?

Le risposte di Bruno e Carlo sono in contraddizione, quindi uno di essi mente di conseguenza Antonio è sincero; il mentitore è allora Bruno (afferma che Antonio mente!) e Carlo (sincero) ha il motorino. Bruno afferma di non avere il motorino, ma ciò può essere sia vero che falso, in quanto la falsità della risposta dipende da "Antonio mente"! Non si può allora stabilire con certezza chi ha il motorino (risposta E).

10) I pezzi della torta

La bisnonna ha festeggiato i cent'anni con una grossa torta. Lei ha fatto il primo taglio e i suoi parenti presenti, 2 figli, 4 nipoti e 8 pronipoti, ne hanno fatto un altro ciascuno. In questo modo si sono ottenuti tanti pezzi di torta (non uguali!) da soddisfare parenti e invitati. Qual è il numero massimo di persone che possono assaggiare la torta?

A. 64
B. 121
C. 196
D. 225
E. 256

Senza tagli abbiamo un sol pezzo (l'intera torta!), con un taglio si hanno 2 pezzi, con 2 tagli 4 pezzi, con 3 tagli 7 pezzi e così via; abbiamo allora la successione: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22…dove ogni elemento è ottenuto dal precedente aggiungendo 1, 2, 3, 4, 5, 6, …cioè il numero dei tagli fatti (infatti, per massimizzare il numero dei pezzi, è necessario che ogni taglio incontri tutti gli altri, formando nuovi "pezzi" di torta!).
Sapendo che $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$, gli elementi della successione data sono $1+n(n+1)/2$.
Nel nostro caso $n=15$, quindi i pezzi di torta sono $1+15(15+1)/2 = 121$ (risposta B).