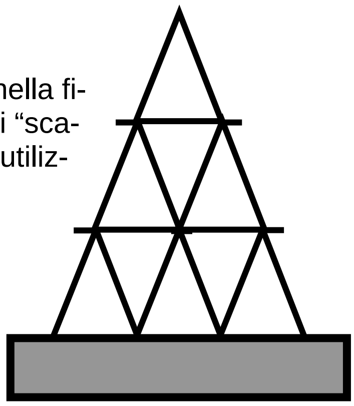
SECONDA MANCHE

Quesiti a risposta chiusa

1) Il castello di carte

Paolo è abilissimo a costruire castelli di carte a forma triangolare (come nella figura in cui si sono utilizzate 15 carte), servendosi di quasi tutte le carte di “scala 40”, ovvero due mazzi di 54 carte ciascuno. Determinate quante carte utilizza per costruire il castello più alto.



A. 100
B. 101
C. 102
D. 103
E. 104

2) La media delle monete

Qual è il numero medio di volte che devo lanciare una moneta da 2 Euro in modo da ottenere sia testa che croce ? (si supponga la moneta perfettamente equilibrata).

A. 2
B. 2,5
C. 3
D. 4
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta

3) I numeri “perfetti”

Un numero è perfetto quando è la somma di tutti i suoi divisori, escluso il numero stesso. Per esempio: 6 è divisibile per 1, 2 e 3, 1+2+3 = 6, quindi 6 è perfetto; invece 8 è divisibile per 1, 2 e 4, 1+2+4 = 7, quindi 8 non è perfetto . Quanti sono i numeri perfetti minori di 30?

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta

4) I C.A.P. della signora Anita

La signora **Anita Latina** abita ad **Assiro Rissa** (piccolo comune della Val **Anilina**), col marito **Otto** e la figlia **Anna**, in via **Arca Sacra** n° **161**. Vista la “palindromicità” di tutta la sua famiglia, chiede alle Poste Italiane di attribuire al suo indirizzo un Codice di Avviamento Postale palindromo, tipo 34043 oppure 16161, cioè identico se letto nei due sensi. Inoltre vuole che le 5 cifre del C.A.P. non siano ripetute più di tre volte. Quanti sono i possibili C.A.P. con queste caratteristiche?

A. 720
B. 729
C. 810
D. 1.000
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta

5) Aiutiamo “Braccio di Ferro”

Dobbiamo soccorrere “Braccio di Ferro” inviandogli immediatamente degli spinaci. Ne abbiamo 8 scatolette, ma una è stata avvelenata da Brutus. Le scatole sono esattamente uguali, ma, per fortuna sappiamo che quella avvelenata pesa poco di più delle altre. Disponendo di una bilancia a bracci uguali, quante pesate sono necessarie, come minimo, per individuare con certezza la scatoletta avvelenata?

A. 2
B. 3
C. 4
D. 7
E. nessuna delle risposte precedenti è esatta

6) Le prof. al concerto

La prof.ssa Maria e 4 colleghe, che insegnano 5 materie differenti, si recano spesso ai concerti di musica classica. Laura e la “filosofa” arrivano sempre puntuali, mentre Lucia è sempre in ritardo. Si siedono tutte affiancate, sulla stessa fila. Marina è tra l’insegnante di lettere e quella di scienze, mentre la “matematica” è tra Anna e la “filosofa”. Al termine del concerto la prof. di matematica accompagna in auto sia Laura che la prof. di lettere, mentre le altre tornano in tram. Come si chiama l’insegnante di scienze?

A. Anna
B. Maria
C. Laura
D. Lucia
E. Non si può stabilire per mancanza di informazioni

7) Le caramelle di De Matt

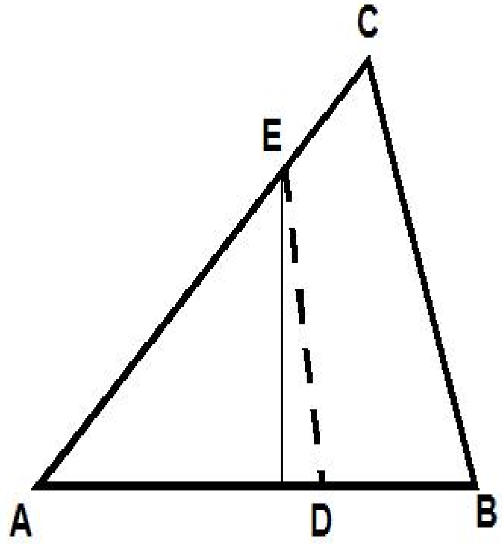
Il prof. Matteo De Matt, che è un matematico goloso di caramelle frizzanti, ne riceve in regalo 10, insieme a 10 caramelle al limone e 10 all’arancia. Li sistema in 3 contenitori uguali, da 10 caramella ciascuno, in modo tale che, se pesca una caramella da ogni contenitore, la probabilità che siano tutte e tre frizzanti è doppia della probabilità che siano tutte di uno degli altri due gusti. Qual è il massimo numero di caramelle frizzanti contenute in uno dei contenitori?

A. 4
B. 5
C. 6
D. 7
E. 8

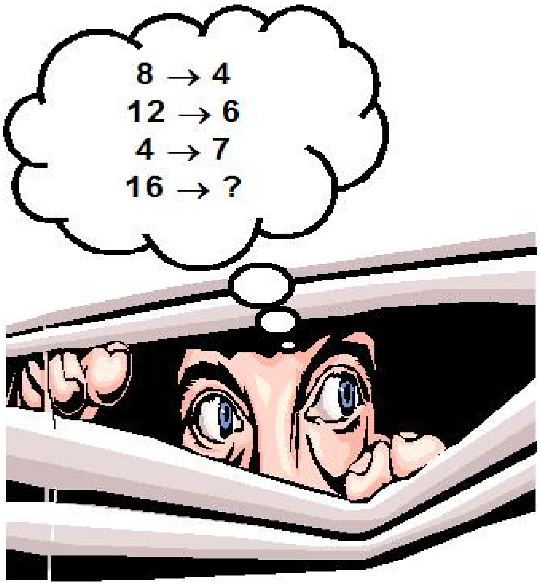
Quesiti a risposta aperta

8) Gli eredi “Gambalunga”

I gemelli Pietro e Paolo Gambalunga ereditano un grande terreno triangolare ABC, tutto recintato, il cui ingresso carraio è posto nel punto D distante 2.034 m da A e 1.134 m da B. Decidono subito di misurarne il perimetro contando i passi: Pietro si dirige da D verso A e poi verso C, Paolo da D verso B e poi verso C; quando Pietro giunge in C ha contato 5537 “passi” e dopo un certo tempo anche Paolo arriva in C, ma ha perso il conto! Si ricorda solo che quando si trovava in B era a 1575 passi. “Non importa!”- dice Pietro - “tanto abbiamo lo stesso passo, ora pensiamo a dividere il terreno in due parti di ugual estensione”. Decidono allora di costruire una cinta rettilinea che parte da D e arriva in un punto E del lato AC, in modo tale che l’area del triangolo ADE sia uguale a quella del quadrilatero BDEC.
A quanti metri da C si trova E?



9) Una spia vuol entrare a Neurolandia



L'agente segreto "Piy Greck" deve recarsi nel ducato di Neurolandia (noto paese dove tutti "danno i numeri") per un'importante missione. Non avendo il lasciapassare, osserva come si comportano le guardie di confine per identificare quelli che hanno diritto di ingresso nel ducato: essi formulano un numero *x* e chiedono al viaggiatore una risposta (sempre numerica, dipendente da *x*) corrispondente, se esatta, alla chiave per entrare. Arrivano tre persone e Piy Greck riesce ad intercettare le seguenti parole:

I° viaggiatore: "otto", risposta "quattro" ed entra;
II° viaggiatore: "dodici", risposta "sei" ed entra;
III° viaggiatore: "quattro", risposta "sette" ed entra.

Piy rimane perplesso, ma pensa di aver capito e quindi tenta di entrare.
Le guardie formulano "sedici", lui risponde "sei" e … viene arrestato e condannato ad enumerare tutte le cifre di π ovvero 3,1,4,1,5,9,2,6,….
Cosa aveva capito Piy?
Peccato che Piy non sapesse che la formula che legava la chiave con il numero fornito dalle guardie fosse del tipo $y = ax^2 + bx + c$
Allora, quale doveva essere la risposta per $x = 16$?

10) L'ambulante….colpisce ancora!

Un ambulante sottoscrive un contratto che prevede di ricevere, tutte le settimane, per 5 giorni consecutivi, lo stesso quantitativo di merce di vario tipo da saldare interamente entro la prima giornata di lavoro. Per fortuna il primo giorno, vendendo la merce nuova a 9€ al pezzo e 53 unità di merce che aveva in magazzino al prezzo di costo (del nuovo), riesce a saldare quanto stabilito, avanzando pure 3 €; in tutti gli altri giorni il guadagno sarà netto, peccato che ogni settimana non può acquistare più di 100 pezzi di merce! Determinate la quantità e il prezzo di costo unitario (in euro) della merce acquistata, sapendo che si tratta di numeri interi.

SOLUZIONI

Quesiti a risposta chiusa

1) Il castello di carte

I possibili castelli sono formati da 2, 7, 15, 26,… carte, cioè, per aumentare di un piano, occorre aggiungere (al piano precedente) 2, 5, 8, 11…carte, ovvero al piano n, 3n+2 carte (ovviamente il piano "zero" ha 0 carte!).
La successione è allora data da $\sum (3n+2) = 3n(n-1)/2 + 2n$ e abbiamo l'equazione $3n(n-1)/2 + 2n = 108$.
Essa non ha soluzioni intere, ma la positiva è $n_1 = 8,32\ldots$, quindi, ponendo n = 8, si ha che il castello ha 8 piani e utilizza 100 carte (risposta A).

2) La media delle monete

La probabilità di ottenere testa (o croce) con un lancio è 1/2, quindi, in media, si ottiene una testa (o una croce) con due lanci. Se al primo lancio esce testa, occorrono poi in media due lanci per ottenere croce, se invece al primo lancio esce croce, occorrono poi in media due lanci per ottenere testa. In tutto, in media, occorrono 3 lanci (risposta C).

3) I numeri "perfetti"

Oltre a 6, abbiamo 28 che è divisibile per 1, 2, 4, 7 e 14, 1+2+4+7+14 = 28, quindi 28 è perfetto e non ce ne sono altri minori di 30 (risposta B).
Nota: i numeri perfetti conosciuti sono del tipo $2^n \cdot (2^{n+1} - 1)$ con $2^{n+1} - 1$ numero primo, quindi lo sono $2 \cdot 3 = 6$, $2^2 \cdot 7 = 28$, $2^4 \cdot 31 = 496$,…. ($2^3 \cdot 15 = 120$ non lo è, perché 15 non è primo!).

4) I C.A.P. della signora Anita

Il codice palindromo è del tipo xyzyx, con le cifre x e y diverse (altrimenti il codice avrebbe 4 cifre uguali!). Le possibilità sono dunque $10 \cdot 9 \cdot 10 = 900$ (risposta E).

5) Aiutiamo "Braccio di Ferro"

Mettendo sui piatti della bilancia tre scatolette per parte, se la bilancia è in equilibrio la scatola avvelenata è una delle altre due, che si può individuare con una seconda pesata; se la bilancia non è in equilibrio, quella avvelenata appartiene alla terna più pesante, quindi pesando due delle tre scatolette, si individua quella avvelenata (infatti è la più pesante, oppure se sono in equilibrio quella non pesata). Quindi bastano due pesate (risposta A).

6) Le prof. al concerto

Possiamo costruire la seguente tabella di abbinamento delle materie ai nomi, escludendo con una "x" quelle impossibili per i dati del problema:

materia\prof.	Maria	Laura	Lucia	Marina	Anna
filosofia		x	x		x
lettere		x		x	
scienze				x	
matematica		x			x
altra materia					

Quando sono sedute, abbiamo le due terne "lett,Marina,sci" e "Anna,mat,fil", ed essendo 5 persone, Anna insegna o lettere o scienze. Non serve però analizzare i due casi, perché, da come sono sedute, abbiamo l'informazione che Marina non insegna né matematica e nemmeno filosofia, quindi è insegnante della materia non nominata. Da ciò si deduce che Maria è la "filosofa" e, infine si completano gli abbinamenti inserendo il simbolo "o" (che deve comparire una sola volta in ogni riga e in ogni colonna).

materia\prof.	Maria	Laura	Lucia	Marina	Anna
filosofia	o	x	x	x	x
lettere	x	x	x	x	o
scienze	x	O	x	x	x
matematica	x	x	o	x	x
altra materia	x	x	x	o	x

Dunque l’insegnante di scienze si chiama Laura (risposta C).

7) Le caramelle di De Matt

E' noto che il prodotto di n numeri positivi, avente somma costante, è massimo quando tutti i numeri sono uguali, quindi, visto che le caramelle sono 10, occorre ripartirle nelle tre urne in modo più uniformemente possibile, cioè 3, 3 e 4 (non potendo inserirne 10/3, spezzando le caramelle!). Nelle urne si metteranno poi 6, 1 e 3 al limone e 1, 6 e 3 all'arancia. Calcolando le probabilità abbiamo: P(3 frizzanti) = $3/10 \cdot 3/10 \cdot 4/10 = 36/1.000$, P(3 al limone) = $6/10 \cdot 1/10 \cdot 3/10 = 18/1.000$ e P(3 all'arancia) = $1/10 \cdot 6/10 \cdot 3/10 = 18/1.000$, come richiesto dal problema (risposta A).

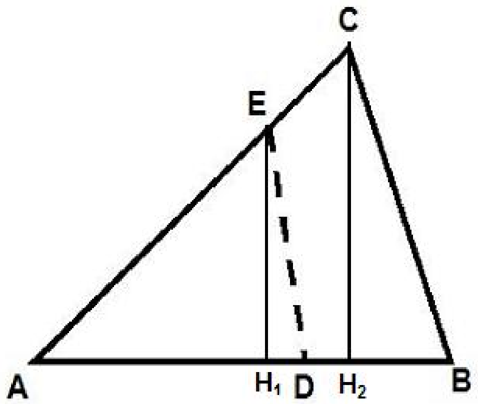
Quesiti a risposta aperta

8) Gli eredi "Gambalunga"

Se ED divide il terreno a metà, l'area del triangolo ABC è doppia di quella del triangolo ADE, quindi, tracciando le altezze EH_1 e CH_2, abbiamo l' equazione:

$$2 \cdot AD \cdot EH_1 = AB \cdot CH_2.$$

Ma tali altezze sono cateti di due triangoli rettangoli simili, quindi proporzionali alle rispettive ipotenuse AE e AC, per cui l'equazione diventa: $2 \cdot AD \cdot AE = AB \cdot AC$.



Dai dati del problema AB = (2.034+1.134)m = 3.168 m, il rapporto metri/passi è 1.134/1.575 = 0,72 e AD+DC = $5.537 \cdot 0{,}72$ = 3.986,64 m, quindi AC = (3.986,64 – 2.034)m = 1.952,64 m e, infine, risolvendo l'equazione: AE = $3.168 \cdot 1952{,}64/(2 \cdot 2.034)$ m = 1.520,64 m.

La distanza da C alla nuova recinzione è CE = (1.952,64 –1.520,64) m = 432 m

Nota: applicando la trigonometria (area S = 1/2 bc *sen* α), la soluzione sarebbe stata più breve, senza ricorrere ai triangoli rettangoli simili.

9) Una spia vuol entrare a Neurolandia

Riportiamo la successione delle domande e delle risposte nella seguente tabella:

domande	x	8	12	4	16
risposte	y	4	6	7	y = ?

La spia, rispondendo y = 6, poteva pensare che la risposta fosse data dal "numero delle lettere" della domanda, cioè la "funzione" f(x) = "numero delle lettere di x, nell'alfabeto italiano", con x intero. Invece, tenuto conto che la risposta doveva essere del tipo $f(x) = ax^2+bx+c$, con a,b,c da determinarsi. Sostituendo i tre valori dati di x e y, si ottiene il sistema formato dalle tre equazioni: $64a+8b+c=4$, $144a+12b+c=6$, $16a+4b+c=7$. Risolvendolo abbiamo

$a = 5/32$, $b = -21/8$, $c = 15$, da cui $f(x) = (5x^2 - 84x + 480)/32$ e, infine, $f(16) = 13$.

Senza risolvere alcun sistema, ordinando la tabella rispetto ai valori di x, che sono in progressione aritmetica, possiamo utilizzare il "metodo delle differenze" per trovare le y:

x	4		8		12		16
y	7		4		6		y = ?
$\Delta_1 y$		–3		2			
$\Delta_2 y$			5				

y	7		4		6		**13**
$\Delta_1 y$		–3		2		**7**	
$\Delta_2 y$			5		**5**		

10) L'ambulante….colpisce ancora!

Detta x la quantità di merce ricevuta ogni giorno e y il prezzo di costo, abbiamo l' equazione: $5xy + 3 = 9x + 53y$, con le condizioni $x,y \in N$ (interi naturali), $5x \leq 100$ ovvero $x \leq 20$ e $y < 9$.

Procedendo "per tentativi", conviene risolverla rispetto a x (le y sono di meno!), ottenendo:

$x = \frac{53y - 3}{2y - 9}$ e poi sostituendo valori interi di y da 2 a 8. Si ottiene successivamente x=103, x=26, x=19, x=131/8, x=15 e poi tutte frazioni. Abbiamo allora solo due soluzioni accettabili: x=19 e y=4 o x=15 e y=6. L'ambulante riceve giornalmente 19 pezzi di merce a 4 €, oppure 15 pezzi a 6 €.