



SECONDA MANCHE

Quesiti a risposta aperta

1) Siamo tutti nel pallone

Un pallone di calcio viene costruito cucendo assieme pentagoni (neri) ed esagoni (bianchi), regolari di cuoio, aventi lo stesso lato. Ogni pentagono è circondato da cinque esagoni, mentre ogni esagono è circondato da tre pentagoni che si alternano con tre esagoni. Determinate, dimostrandolo matematicamente, quanti sono i pentagoni, gli esagoni e le cuciture che vengono fatte?



Soluzione

Dai dati del problema, se x il numero dei pentagoni e y quello degli esagoni, abbiamo $5x = 3y$.

Il pallone può essere pensato come un poliedro (semiregolare!), quindi le sue facce sono $F = x + y$;

i vertici del poliedro sono $V = 5x$, perché i pentagoni non sono accostati fra loro;

gli spigoli sono $S = 5x + 3y/2$, perché ogni pentagono (isolato) forma $5x$ spigoli, mentre per ogni esagono ve ne sono altri 3, ma con uno spigolo comune a due esagoni.

Sostituendo la prima equazione abbiamo: $F = 8y/5$, $V = 3y$ e $S = 9y/2$, da cui, ricordando che per i poliedri vale la relazione di Eulero: $F + V = S + 2$, si ha: $8y/5 + 3y = 9y/2 + 2$ ovvero $y = 20$ e quindi $x = 12$.

I pentagoni sono 12, gli esagoni 20 e le cuciture $S = 90$.

2) Dal film “Per qualche dollaro in più” (Sergio Leone '65, con C.Eastwood, L.Van Cliff e G.M.Volontè)

Due bounty-killer, il “Monco” (Eastwood) e il “Colonnello” (Van Cliff) si mettono sulle tracce di “El Indio” (Volontè), uno spietato criminale messicano.... Memorabili: la “falsa” rapina alla banca di Santa Cruz, con un bel bottino “tondo tondo” di quasi 400.000 \$ e lo spettacolare assalto al Banco Central di El Paso, dove ogni componente della banda si è portato via una cassa d’oro del valore di 90.000 \$, mentre El Indio, da solo, teneva a bada più di 100 rurales! Dopo alterne vicende il film si conclude in un bagno di sangue, con l’uccisione di tutti i fuorilegge. Nel finale i nostri due eroi recuperano dollari e oro e “contano” il loro incasso: il 5% del frutto delle due rapine e le taglie dei banditi uccisi (2.000\$ ciascuno più 20.000\$ per El Indio).....

Si accorgono così che il totale a loro spettante è identico all’ammontare della prima rapina a Santa Cruz!

Quanti erano i compagni dell’Indio e a quanti dollari ammontavano le due rapine?





Soluzione

Se poniamo x il numero dei banditi, la seconda rapina ammonta a $90.000x$, quindi la taglia è $5\% \cdot 90.000x = 4.500x$.

Per comodità, poniamo il bottino della prima rapina = $1.000y$ (infatti è una cifra "tonda tonda") con una taglia di $5\% \cdot 1.000y = 50y$, da cui l'equazione:

$$4.500x + 50y + 2.000x + 20.000 = 1.000y,$$

che semplificata diventa:

$$130 \cdot x - 19y + 400 = 0, \text{ con la condizione } y (\max) < 400 \text{ e } x, y \in \mathbb{N}.$$

Risolviendo l'equazione si trova $y = 10(13x + 40)/19$,

mentre, ponendo $y = 400$, si trova $x = 720/13 = 55,38\dots$,

che non è accettabile (non essendo intera), ma che ci informa che $x < 56$.

A questo punto basta sostituire successivamente $x = 55, 54, 53, 52, 51 \dots$

La prima soluzione intera si ottiene con $x = 51$ e $y = 370$.

v

I compagni dell'Indo erano allora 51,

la prima rapina di 370.000 \$ e la seconda $51 \cdot 90.000 \$ = 459.000 \$$.

3) I tre beoni

Tre amici trovano una botticella contenente 21 litri di "Brunello" e decidono di dividerseli equamente in modo che ciascuno ne abbia 7 litri da portare a casa. Hanno tre contenitori non graduati da 13, 8 e 5 litri. Descrivete come è possibile effettuare la divisione esatta del vino.

Soluzione

Conviene disporre i dati nella seguente tabella, dove "**B, 13, 8, 5**" sono i contenitori e i numeri indicano i rispettivi litri di vino contenuti dopo ogni travaso.

B	13	8	5	descrizione
21	0	0	0	inizio
16	0	0	5	travaso: B → 5
11	0	5	5	5 → 8 , B → 5
11	0	8	2	5 → 8
19	2	0	0	5 → 13 , 8 → B
14	2	5	0	B → 5 → 8
9	2	5	5	B → 5
9	2	8	2	5 → 8
17	4	0	0	5 → 13 , 8 → B
12	4	5	0	B → 5 → 8
7	4	5	5	B → 5
7	4	8	2	5 → 8
7	12	2	0	8 → 13 , 5 → 8
7	7	2	5	13 → 5
7	7	7	0	5 → 8 (fine)



Quesiti a risposta chiusa

1) Area e perimetro

L'area di un rettangolo, aumenta di un m^2 se si aumentano i lati di mezzo metro. Qual è il suo perimetro misurato in cm?

- A. 100
- B. 200
- C. 300
- D. 400
- E. non si può determinare essendo i dati insufficienti

Detti x e y i lati abbiamo l'equazione $(x+50)(y+50)=xy+10.000$ che risulta indeterminata. Però, il problema richiede il perimetro che è $2(x+y)$, quindi semplificandola abbiamo: $50(x+y) = 7.500$ da cui $2(x+y) = 7.500/25 = 300$ (risposta C).

2) I quattro amici

Francesco, Laura, Paolo e Nora stanno valutando se partire per una vacanza. Si sa che: se parte Paolo, parte anche Nora; se non parte Francesco non parte nemmeno Nora; se parte Francesco parte anche Laura. Quale delle seguenti affermazioni può essere dedotta?

- A. Non parte nessuno
- B. Partono tutti
- C. Partono Francesco e Laura
- D. Se parte Francesco, parte anche Paolo
- E. Se non parte Laura, non parte nemmeno Paolo

Dalla terza affermazione si deduce che "se non parte Laura non parte anche Francesco", quindi, dalla seconda, "non parte nemmeno Nora" e quindi dalla prima "non parte Paolo". (risposta E).

3) "Sua altezza"

Un triangolo, ha le tre altezze espresse da tre numeri interi (in cm). Due altezze sono cm 11 e cm 31. Quanti sono i diversi triangoli con queste caratteristiche?

- A. 9
- B. 10
- C. 20
- D. 21
- E. infiniti

Detta h la terza altezza, i tre lati sono proporzionali a $1/h$, $1/11$ e $1/31$, quindi abbiamo la disuguaglianza: $1/11 - 1/31 < 1/h < 1/11 + 1/31$, da cui $20/341 < 1/h < 42/341$ cioè $8,12 < h < 17,05$. Essendo h un numero intero, abbiamo solo 9 possibilità (risposta A).

4) La sequenza del prof. De Matt

Il prof. De Matt scrive alla lavagna la seguente sequenza di numeri: 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211,..... Qual è il prossimo numero sapendo che è uno dei seguenti?

- A. 322311
- B. 13112221
- C. 23111321
- D. 31122111
- E. 31212211

La sequenza parte da 1 e poi "descrive" i numeri scritti nel posto precedente, quindi abbiamo "un uno" ovvero 11, poi "due uno" cioè 21, "un due, un uno":1211, "un uno, un due, due uno":111221, "tre uno, due due, un uno":312211 e infine "un tre, un uno, due due, due uno":13112221, risposta B.



5) Le due misure

In un compito in classe Pietro e Paolo devono calcolare l'area di un rettangolo che l'insegnante ha fotocopiato sul loro foglio. Essi misurano col righello (errore possibile 0,5 mm) le dimensioni: Pietro ottiene 30 cm^2 e Paolo 31 cm^2 . Sapendo che la lunghezza misurata da Pietro è mm 125 e la larghezza misurata da Paolo è mm 25, chi ha calcolato meglio la superficie?

- A. Pietro
- B. Paolo
- C. sia Pietro che Paolo
- D. nessuno dei due
- E. non si può stabilire non sapendo le misure esatte

La larghezza misurata da Pietro è $\text{mm } 3.000/125 = \text{mm } 24$, la lunghezza di Paolo è $\text{mm } 3.100/25 = \text{mm } 124$.

Essendo l'errore possibile di 0,5 mm, nel calcolo della superficie Pietro commette un errore relativo pari a $0,5/125 + 0,5/24 = 0,0248 = 2,48\%$, mentre quello di Paolo è $0,5/124 + 0,5/25 = 0,0240 = 2,40\%$, quindi Paolo è più preciso (risposta B).