GRAN PREMIO DI MATEMATICA - EDIZIONE 2009 – SOLUZIONI – II MANQUE

De Matt risparmia di più …

Il prof. Matteo de Matt ha iniziato, il giorno 1/1/2008, una particolare forma di risparmio: il primo giorno mette nel salvadanaio un centesimo, il secondo due centesimi, il terzo tre…al centesimo una moneta da un euro, al 101-esimo una moneta di un euro e un centesimo…al 200-esimo due monete da un euro…. e così via fino al 31/12/2008, quando inserisce 3 monete da un euro e 66 centesimi. Non avendo un numero sufficiente di monetine, dopo aver introdotto la quota giornaliera, controlla quanti centesimi vi sono nel salvadanaio e, se ve ne sono 100 (o più), ne toglie 100 e aggiunge una moneta da 2 euro, incrementando pure il risparmio! Che somma avrà a fine anno?

Risposta

Cominciamo a calcolare le monete da un euro: De Matt metterà nel salvadanaio
una moneta da un euro a partire dal 100-esimo giorno e fino al 199-esimo (in tutto 100),
due monete da un euro dal 200-esimo giorno e fino al 299-esimo (in tutto 200),
tre monete da un euro dal 300-esimo giorno e fino al 366-esimo (in tutto 201),
Le monete da un euro sono dunque 501.

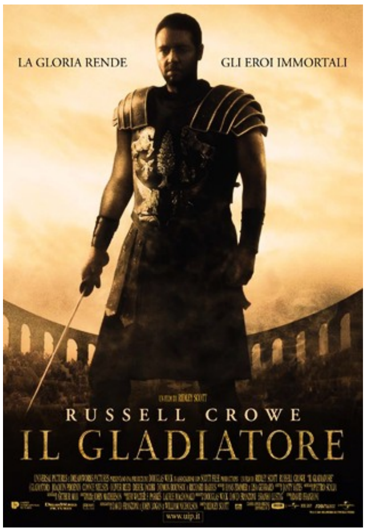
Per determinare quelle da due euro, occorre stabilire in che giorno "n" il numero dei centesimi totali supera 99 (ricordando che "n" è pure uguale al numero dei centesimi inseriti quel giorno!), cioè risolvere le successive disuguaglianze:

$n(n+1)/2 > 99$	da cui n=14 e rimarranno nel salvadanaio 14(14+1)/2 – 100 = 5 centesimi,
$5+(n-14)(n+15)/2 > 99$	da cui n=20 e rimarranno nel salvadanaio 5+6x35/2 – 100 = 10 centesimi,
$10+(n-20)(n+21)/2 > 99$	da cui n=24

e rimarranno nel salvadanaio 10+4x45/2 – 100 = 0 centesimi, e così via.

Iterando il procedimento (170 volte in tutto!) abbiamo 170 monete da 2 euro e rimangono ancora 61 centesimi.
La somma totale sarà allora 501€ + 170x2€ + 0,61€ = 841,61€.

Più semplicemente si poteva calcolare la somma totale in centesimi, 366x367/2 = 67.161, togliere i 501 euro (in centesimi) 67.161 – 50.100 = 17.061, da cui è evidente che le monete da due euro sono 170 (con un avanzo di 61 centesimi).



Dal film "Il gladiatore" (Ridley Scott - 2000 con Russell Crowe)

Il vittorioso generale romano Massimo viene designato da Marco Aurelio suo successore, ma il figlio dell'imperatore, Commodo, uccide il genitore e ordina di eliminare il rivale. Massimo diventa così il bersaglio di una spietata caccia all'uomo. Quando viene catturato è destinato a combattere nelle arene come gladiatore, ma finisce per diventare un guerriero praticamente invincibile…..

In occasione dei saturnali, Commodo ha organizzato una vera carneficina che coinvolge i 32 migliori gladiatori con combattimento a eliminazione diretta. L'invincibile Massimo ha il 90% di probabilità di vincere il primo incontro, l'80% il secondo, il 70% il terzo e così via; gli altri gladiatori fra i quali l'amico fraterno Settimio, sono invece alla pari. I perdenti, che muoiono in combattimento nel 40% dei casi, sperano nella grazia dell'imperatore, che è magnanimo una volta su tre. Determinate la probabilità che Settimio ha di vincere i saturnali e il numero medio di gladiatori morti nella strage.

Risposta

Essendo $32 = 2^5$, Massimo vince i saturnali se vince tutti i 5 incontri, quindi
P=0,9x0,8x0,7x0,6x0,5 = 0,1512 = 15,12%,
quindi la probabilità di perderli è 1-P = 84,88%.

Poiché gli altri gladiatori sono tutti alla pari la probabilità di Settimio è 84,88%/31 = 0,0274 = 2,74%.

Per quanto riguarda i 31 perdenti, essi hanno il 60%x1/3 = 20% di probabilità di sopravvivere, quindi l'80% di probabilità di soccombere e il numero medio è 31x80% = 24,4.

Rivestiamo un cubo
Vogliamo tagliare un rettangolo di carta adesiva colorata, lungo cm 40 e largo cm 30, per rivestire un cubo di cartone. Qual è il volume del cubo sapendo che abbiamo utilizzato tutta la carta senza sprecarne nemmeno un mm^2? E come dovremo procedere con un numero minimo di tagli?

Risposta
La superficie del rettangolo 40x30 cm^2 = 1.200 cm^2, deve essere uguale alla superficie totale del cubo (6 quadrati!), quindi ogni quadrato ha una superficie di 200 cm^2.

Lo spigolo del cubo è allora cm $\sqrt{200}$ = cm $10\sqrt{2}$, da cui il volume cm^3 $2.000\sqrt{2}$.
Prima di procedere ai tagli, suddividiamo il rettangolo in 12 quadrati uguali di lato cm 10; piegando poi la carta in modo da ottenere un solo quadrato, basterà fare un unico taglio lungo una delle diagonali!,
Otterremo tre quadrati di area 200 cm^2, cinque triangoli rettangoli di area 100 cm^2 e altri due triangoli rettangoli di area 50 cm^2, con i quali comporre gli altri tre quadrati.

QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

Uno scivolo a Neurolandia !
Neurolandia è dominata dal monte Alto (2.008 Nm, cioè 2.008 neurolandiometri!) dalla cui vetta A scende a valle una funivia AF perfettamente rettilinea lunga 4.267 Nm. Per la gioia dei Neurolandini è stato costruito, dalla sommità B del monte Basso (1.000 Nm), uno scivolo rettilineo BS, che arriva a valle con la stessa pendenza della funivia. Sapendo che le vette dei due monti distano AB=10.608 Nm, qual è la distanza FS (in Nm) fra gli arrivi della funivia e dello scivolo?

A. 4.920
B. 4.950
C. 4.980
D. 5.010
E. 5.040

Risposta
Avendo la stessa pendenza i triangoli rettangoli AHF e BKS sono simili, quindi BS = AFxBK/AH, cioè BS = 4.267x1000/2008 Nm = 2.125 Nm.
Col teorema di Pitagora si trovano poi le distanze HK= $\sqrt{10608^2-(2008-1000)^2}$ Nm = 10.560 Nm, HF = $\sqrt{4267^2-2008^2}$ Nm = 3765 Nm
e
KS = $\sqrt{2125^2-1000^2}$ Nm = 1.875 Nm.

Quindi FS = (10.560–3.765–1875) Nm = 4.920Nm **(risp.A).**

Cena di fine anno
I ragazzi di VB, prima dell'esame di Stato, hanno invitato a cena i propri insegnanti. Per risparmiare si recano in un ristorante che offre (tutto compreso) due menù fissi: di carne a 16 € o di pesce a 20 € (per persona). I cinque professori presenti prendono tutti il menù a base di pesce, mentre più della metà degli alunni optano per il menù di carne. A fine pasto gli studenti dividono il totale in parti uguali pagando 23€ a testa. Quanto è costata la cena?

A. 322 €
B. 368 €
C. 414 €
D. 460 €
E. 506 €

Risposta
Detto x il numero degli alunni che hanno preso la carne e y il numero di quelli che hanno preso il pesce, abbiamo l'equazione:

$16x + 20y + 100 = 23(x+y)$, cioè $7x + 3y = 100$, con la condizione $x>y$.

Risolta rispetto a y abbiamo $y = (100–7x)/3$.

La prima soluzione intera ($y=31$) si ottiene con $x = 1$, le altre assegnando a x valori in progressione aritmetica di ragione 3, ovvero 4, 7, 10, 13 (con $x = 17$ y è negativo).

Si hanno le coppie (1; 31), (4; 24), (7;17), (10; 10) e (13; 3),

ma essendo $x>y$ l'unica accettabile è $x=13$ e $y = 3$, quindi 16 studenti con una spesa di 368 €

(risp. B).

Il gioco dei denari

Alla Fiera dell'Est per due soldi (un euro) …… si può giocare ai "denari"! Il gioco consiste nell'estrarre una carta da un mazzo regolare di 40 carte: se è nera si perdono i due soldi, se è di quadri ("denari") si vince, mentre se è di cuori se ne pesca un'altra (finché non sia nera o di quadri). L'importo che si incassa in caso di vincita è dato dal "valore" della carta di denari: Asso 10 €, figura 5 €, altra carta 2 €. Quanti centesimi si vincono in media?

A. meno di 0 (si perde sempre!)

B. 0 (il gioco è pari)

C. circa 23

D. circa 40

E. circa 57

Risposta

Poiché se si pesca la carta di cuori la presa è ripetuta, il gioco equivale a pescare su 30 carte, in cui 20 sono perdenti, con probabilità 20/30 = 2/3, e 10 vincenti, con probabilità: 1/3 0 per l'asso di denari, 3/30 = 1/10 per le figure e 6/30 = 2/5 per i rimanenti denari.
Tenuto conto che la posta è 1 €, le rispettive vincite nette sono: 9, 4 e 1 €, quindi la media è:

$-1 \times 2/3 + 9 \times 1/30 + 4 \times 1/10 + 1 \times 2/5 = 7/30 = 0,2333..$

cioè circa 23 centesimi **(risp C).**

Le targhe riflesse

Nello stato di Mathemandia le targhe automobilistiche sono formate da tre simboli: una lettera (da A a Z), una cifra (da 0 a 9) e una lettera (da A a Z).
Poiché ogni famiglia ha esattamente due macchine, il Ministero dei Trasporti ha assegnato ai due veicoli due targhe riflesse: per esempio se la prima automobile è targata G3Y, la seconda è targata Y3G. Quante famiglie vi sono nella stato di Mathemandia?

A. meno di 3100

B. da 3100 a 3199

C. da 3200 a 3299

D. da 3300 a 3400

E. più di 3400

Risposta

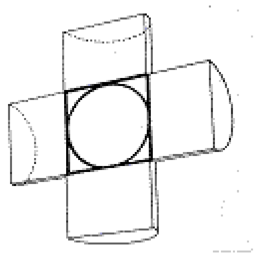
Abbiamo 26 possibilità per il primo simbolo (le 26 lettere), 10 per il secondo (le 10 cifre) e 25 per il terzo,
non potendo ripetere la stessa lettera, altrimenti la targa riflessa sarebbe uguale alla prima.

Le possibili targhe sono allora 26x10x25 = 6.500 e le famiglie 6.500/2 = 3.250 **(risp. C).**

La croce cilindrica

Due cilindri uguali di raggio cm 3 e altezza cm 10 si intersecano ad angolo retto formando una croce. Qual è il volume della croce in cm^3?

A. meno di 400
B. da 400 a 450
C. da 450 a 500
D. da 500 a 600
E. più di 600



Risposta

Il volume è dato dalla somma dei volumi dei cilindri ($V = \pi r^2 h = 90\pi$) meno il volume C della parte comune (perché è contata due volte!).

Per trovare C, basta osservarne la sezione mediana (come in figura), da cui si deduce che il rapporto fra C e il volume della sfera è uguale al rapporto fra la superficie del quadrato e quella del cerchio ovvero:

$\frac{C}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{(2r)^2}{\pi r^2}$, cioè $C = 16/3\ r^3 = 144\ cm^3$.

Il volume della croce è allora $cm^3\ (180\pi - 144) = cm^3\ 421{,}5$ **(risp B).**

Un, due, tre … * Stella!

Anche lo stato di Mathemandia è in crisi e, per risparmiare, si decide di ridurre il numero dei maestri, attualmente 4 in ogni classe, tutti con un netto mensile di 3,14 €-math (circa 1.250 €).
Alle classi che rinunceranno a un maestro sarà assegnata una stella (*); a quelle che rinunceranno a due, 2 stelle (**); a quelle che rinunceranno a tre, 3 stelle (***- classe **superstar**!).
La riforma ha suscitato molte proteste, tanto che diverse scuole hanno mantenuto quattro docenti (nessuna stella!), ma sono state punite con una riduzione del salario di 1/4.
I maestri delle classi (*) mantengono lo stesso stipendio; quelli con (**) hanno un aumento del 50%, mentre i “superstar” triplicano la propria busta paga!
Quanto risparmierà (in %) lo stato di mathemandia?

A. meno del 30%
B. dal 30% al 33%
C. dal 33% al 35%
D. più del 35%
E. non si può stabilire non sapendo il numero delle stelle e delle classi che si sono opposte alla riforma

Risposta

Con (*) si pagano tre stipendi su quattro, quindi il risparmio è del 25%;
con (**) si pagano due stipendi su quattro, ma ciascuno è maggiorato del 50%, il che equivale a tre stipendi
e la stessa cosa nelle classi (***) in cui l’unico superstar percepisce tre stipendi!
Anche la riduzione del salario di 1/4 per le classi ribelli equivale al 25%, quindi prescindendo dal numero di stelle il risparmio è del 25% **(risp. A).**