Gran Premio di Matematica Applicata

EDIZIONE 2010 – seconda manche

1) Un quadrato magico particolare

Nel classico quadrato magico, si inseriscono nelle 9 caselle i numeri 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9, in modo che la somma di ciascuna delle tre righe, delle tre colonne e delle due diagonali **sia sempre 15**.
In questo quadrato magico i numeri inseriti non devono essere necessariamente diversi (anche tutti uguali, come in figura)!

5	5	5
5	5	5
5	5	5

Determinate una legge per ottenere tutti i possibili quadrati magici, partendo,eventualmente, da alcune soluzioni significative.

Inserendo nelle celle le 9 incognite a,b,..k, come nella tabella, abbiamo il sistema di 8 equazioni:

$a + b + c = 15$
$d + e + f = 15$
$g + h + k = 15$
$a + d + g = 15$
$b + e + h = 15$
$c + f + k = 15$
$a + e + k = 15$
$c + e + g = 15$

Esso si può risolvere per sostituzione,
ma se sommiamo le prime 6 equazioni e poi togliamo le ultime due,
otteniamo l'equazione $a+2b+c+2d+2f+g+2h+k=60$,
dalla quale tenuto conto delle altre, si trova:
$(b+h)+2(d+f)=30$ e $2(b+h)+(d+f) = 30$,
ovvero $b+h = d+f = 10$,
da cui $e = 5$ (si poteva prevedere che la casella centrale doveva essere per forza 5);
quindi si ha pure $a+k = c+g =10$.

Posto ora $a=x$ e $b=y$,
abbiamo:
$$h=10-y,\ k=10-x,\ c=15-x-y,\ g=x+y-5,\ d=20-2x-y$$
e, infine, $f=2x+y-10$.

La legge per ottenere tutti i quadrati magici a somma 15 è data dalla tabella:

x	y	$15-x-y$
$20-2x-y$	5	$2x+y-10$
$x+y-5$	$10-y$	$10-x$

Con le condizioni $1 \le x \le 9$ e $1 \le y \le 9$ Interi!

2) I saldi …. "salati"

Per i saldi d'inizio anno, un negozio può acquistare uno stock di scarpe di marca a 16 € al paio.

Una prima stima prevede la vendita di 150 paia a 60€.

Un'analisi più dettagliata però calcola di venderne 5 paia in più, ogni due euro di diminuzione (rispetto ai 60€)
e
5 paia in meno, ogni due euro di aumento (sempre rispetto ai 60€).

Determinate quale deve essere il prezzo di vendita che massimizza il guadagno e il relativo ricavo previsto.

Detto x euro l'aumento ($x>0$) o la diminuzione ($x<0$),
abbiamo l'equazione (del guadagno stimato):

$G = (60 + 2x)(150 - 5x) - 16(150 - 5x) = -10x^2 + 80x + 6.600$.

Essa rappresenta una parabola il cui vertice (max) ha ascissa $x = 80/20 = 4$.

Il prezzo di vendita che massimizza il guadagno è (60+8)€ = 68€ e il ricavo previsto è € 68 (150−20) = € 8.840.

3) Dal film "La stangata" (Robert Redford e Paul Newman George Roy Hill – 1973)

Johnny Hooker (Redford) e il suo amico Luther, truffatori di strada, hanno raggirato il potente gangster Doyle Lonnegan. Per ritorsione Luther viene ucciso e Hooker, per vendicarsi, chiede aiuto ad un vecchio amico, Henry Gondorff (Newman), uno dei più grandi truffatori degli Stati Uniti.
Insieme organizzano una "stangata" ai danni di Lonnegan, creando una finta agenzia di scommesse ……

Si scommetteva proprio su tutto, anche sul lancio di una moneta d'oro sul pavimento: se, entro tre tentativi, la moneta si fermava incrociando almeno uno dei lati delle piastrelle quadrate, se ne vinceva un'altra, altrimenti essa veniva persa….

Qual è la probabilità di vincere la moneta d'oro, sapendo che le piastrelle hanno un lato di 15 cm e che le monete hanno un diametro di 3 cm.

La moneta non tocca i bordi della piastrella, se il suo centro si ferma nel quadrato concentrico ad essa, di lato cm(15–3), che ha un'area di 144cm^2.

La probabilità di non incrociare i bordi è allora: 144cm^2/225cm^2 = 16/25 = 64%.

Essendo disponibili tre tentativi, la probabilità di vincere la moneta diventa:
1 – $(16/25)^3$ = 11529/15625 = 73,7856%.

Peccato che le piastrelle erano leggermente incavate all'interno…..

4) Le navette

Per collegare la stazione di Mathemandia alla "Fiera dell'Est" è stato istituito un servizio di bus navetta, che impiegano esattamente mezz'ora ad effettuare il percorso.
I bus si fermano 10 minuti sia alla stazione, che alla Fiera e partono puntuali ogni 5 minuti.
Quanti bus navetta sono necessari per il servizio?

A. 12
B. 14
C. 16
D. 18
E. 20

Ogni bus impiega un'ora per il percorso a/r, più 20 minuti per le soste, quindi è impegnato per 80 minuti.

Se si vuol far partire una navetta ogni 5 minuti sono necessari 80/5 = 16 bus (risposta C).

5) La famiglia Pock de Poker

Nella famiglia Pock de Poker, Paolo, Daniele, Anna e Chiara sono accaniti giocatori di carte.
Sappiamo che:

- Daniele e Chiara sono figli di Paolo
- Anna è sorella di Paolo
- Il gemello del miglior giocatore e il peggior giocatore sono di sesso opposto
- Il migliore ha la stessa età del peggiore

Chi è il migliore ?

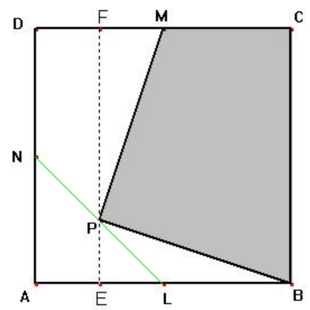
A. Paolo
B. Daniele
C. Anna
D. Chiara
E. Non si può stabilire, essendovi più possibilità

Paolo, il padre, può essere gemello solo di Anna (sua sorella!), ma i gemelli potrebbero essere solo i suoi figli (Daniele e Chiara), i quali hanno comunque un'età inferiore al padre;
con questa premessa:

- Paolo non è il migliore, perché sua sorella (gemella!) non sarebbe la peggiore e quindi non può avere la stessa età di uno dei figli
- Nemmeno Anna è la migliore per la stessa ragione
- Rimangono Daniele e Chiara che sono di conseguenza gemelli
- Daniele non è il migliore perché altrimenti Paolo sarebbe il peggiore, ma non può avere la stessa età del padre
- Quindi è Chiara la migliore e sua zia Anna (la peggiore) è coetanea sua e di suo fratello!

(risposta D).

6) Il quadrilatero



Nel quadrato ABCD di area 36 cm^2, i punti L, M e N sono a metà dei lati AB, CD e DA, come rappresentato dalla figura.

Se P è punto medio del segmento LN, qual è l'area (in cm^2) del quadrilatero PBCM?

A. 20,25
B. 21,60
C. 22,14
D. 23,85
E. 24,75

Tracciato per P il segmento EF parallelo ad AD,
l'area del quadrilatero è la differenza fra il rettangolo EBCF e i due triangoli (uguali) EBP e FMP.

Essendo EB = FP = 3/4AB, EP = MF = 1/4AB,
abbiamo S = (27 − 27/4) cm^2 = 81/4 cm^2 = 20,25 cm^2 (risposta A).

7) Il tema letterario

La prof.ssa Italina Letterin valuta i temi letterari nel seguente modo, facendoli correggere agli studenti di un'altra classe:

- divide quest'ultima in 4 gruppi
- ogni gruppo legge tutti i temi ed esprime il voto (in decimi)
- il voto più alto, espresso da ogni gruppo, sarà riportato sul registro.

Nella prova di fine quadrimestre della IV D, i "bocciati" dai gruppi sono stati rispettivamente 15, 18, 18 e 19, ma, poiché tali giudizi non sono mai stati tutti coincidenti, nessun alunno di IV D risulta insufficiente in italiano!

Qual è il numero minimo degli studenti della classe valutata?

A. 20
B. 21
C. 22
D. 23
E. 24

Detto N il numero degli studenti, i 4 gruppi ne hanno giudicati almeno sufficienti rispettivamente:
N – 15, N – 18,
N – 18 e
N – 19,
da cui (N – 15) + (N – 18) + (N – 18) + (N – 19) ≥ N, ovvero 3N ≥ 70, cioè N ≥ 70/3 = 23,3.
Il numero minimo degli studenti di IV D è 24 (risposta E).

8) La scuola media

In una scuola media il 32% di tutti gli alunni frequenta la prima, il 27% delle femmine la seconda e il 38% dei maschi la terza.

Quale di queste affermazioni è sicuramente falsa?

A. I maschi di seconda e le femmine di terza sono complessivamente più del 41% di tutti gli alunni
B. I maschi di seconda e le femmine di terza sono complessivamente meno del 31% di tutti gli alunni
C. in prima vi sono meno della metà dei maschi che in seconda
D. in seconda vi sono meno femmine che in terza
E. la scuola è tutta maschile

I dati del problema non escludono che la scuola sia formata da tutti maschi o da tutte femmine (il che fa eliminare, oltre alla E, sia la C che la D vere in uno dei due casi).

Nel primo caso i maschi in seconda sono il 30%, quindi pure la B è vera, mentre nel secondo caso vi sono in terza il 41% delle femmine, quindi la risposta sicuramente falsa è la A.

Oppure, detto M e F il numero dei maschi e delle femmine della scuola, x quello dei maschi di seconda e y quello delle femmine di terza, abbiamo l'equazione:
$32\%(M+F) + (27\%F + x) + (38\%M + y) = M+F$
da cui
$x+y = 30\%M + 41\%F$,
ma poiché, $30\%M + 41\%F = 41\%(M+F) - 11\%M \leq 41\%(M+F)$,
si ha $x+y \leq 41\%(M+F)$

quindi è sicuramente falso che sia $x+y > 41\%(M+F)$ (risposta A).