GARA MATEMATICA SECONDA MANCHE

Quesiti a risposta aperta

1) Gli ovetti con sorpresa

Un’azienda dolciaria produce gli ovetti “Killer”, contenenti un giocattolino come sorpresa.

Decide di venderli in confezioni da 9 ovetti per esaurire la scorta di giocattoli disponibili (numero compreso fra 6.000 e 8.000).

La scelta della confezione da 9 è stata stabilita dallo staff, poiché, per confezioni da 4, 5, 7 o 8 avanzava sempre un giocattolo e per confezioni da 6 addirittura 3.

Quante confezioni saranno messe in vendita?

Soluzione

Se n è il numero di ovetti, $n-1$ è divisibile per 4, 5, 7 e 8, cioè per $5 \times 7 \times 8 = 280$; allora, detto k il quoziente fra $n-1$ e 280 abbiamo: $n = 280k + 1$.

Essendo n divisibile per 9, la somma delle sue cifre è divisibile per 9, per cui, $k = 9h+8$ e, sostituendo, si ottiene $n = 280(9h+8) + 1= 2.520h + 2.241$.

Ma $6.000 < n < 8.000$, quindi $6.000 < 2.520h + 2.241 < 8.000$, ovvero $179/120 < h < 5.759/2.520$, che approssimato diventa $1{,}49 < h < 2{,}29$, ed essendo intero si ha l’unica soluzione $h = 2$, cioè $n = 7.281$.

Il numero delle confezioni è $7.281/9 = 809$.

---

2) Dal film "Nuovo Cinema Paradiso" (di Giuseppe Tornatore – 1988)

Nell'immediato dopo guerra, in un paese della Sicilia, il cinema oratoriano "Paradiso" è l'unico divertimento per la popolazione.

Purtroppo le scene sono sottoposte alla censura del parroco, per cui, dopo alcuni anni, con l'aiuto di un cittadino vincitore al totocalcio, viene aperto nel paese il "Nuovo Cinema Paradiso", locale molto grande dotato di platea e galleria, con circa lo stesso numero di posti.

Il giorno dell'inaugurazione sono stati occupati tutti i posti a sedere con un incasso di 50.000 lire esatte. Sapendo che il costo in galleria era di 150 lire per gli adulti e 95 per i ragazzi, che il costo in platea era di 120 lire per gli adulti e 85 per i ragazzi e che gli adulti in galleria erano 115 e in platea 130, quanti posti a sedere vi erano nel "Nuovo Cinema Paradiso"?

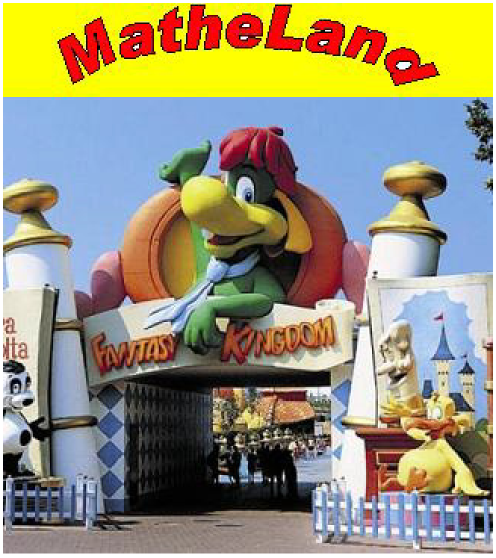
Soluzione

Detto x il numero dei posti in galleria e y quello dei posti in totale, abbiamo l'equazione:

$95(x-115) + 17.250 + 85(y-x-130) + 15.600 = 50.000$, cioè $2x + 17y = 7.825$, con le condizioni $x \geq 115$, $y \geq x+130$, $y \approx 2x$.

Essendo tutte le variabili intere, y deve essere dispari, quindi posto $y=2k+1$, abbiamo $x = 3.904 - 17k$, con le condizioni $3.904 - 17k \geq 115$, $2k+1 \geq 3.904 - 17k + 130$, ovvero $213 \leq k \leq 222$, da cui si ricavano le 10 soluzioni intere: $x = 283$ $y = 427$, $x = 266$ $y = 429$, $x = 249$ $y = 431$, $x = 232$ $y = 433$, $x = 215$ $y = 435$, $x = 198$ $y = 437$, $x = 181$ $y = 439$, $x = 164$ $y = 441$, $x = 147$ $y = 443$, $x = 130$ $y = 445$; di esse quella che rispetta meglio la condizione $y \approx 2x$, è $x = 215$ $y = 435$, quindi il totale dei posti a sedere è 435.

3) Si entra gratis a MatheLand!



A Mathemandia è stato inaugurato un nuovo parco di divertimento e, tutti i sabati, si è deciso di far entrare gratuitamente **una** sola persona in funzione della sua data di nascita (giorno e mese).

Essendo troppo semplice per dei matematici far entrare senza pagare coloro che festeggiano il compleanno in quel giorno (come in uso in Italia nei vari Land), si segue un altro criterio: nel momento che si apre l'unico botteghino di ingresso, in bigliettaio segna la data di nascita della persona che entra (pagando) e così via:
il primo degli altri che è nato nello stesso giorno di uno dei precedenti entra gratis, e da quel punto la promozione è finita.

Considerando l'anno di 365 giorni, equamenti favorevoli alle nascite, ovvero che la probabilità di nascere in un determinato giorno è 1/365, determinare in quale punto della fila conviene collocarsi per avere la massima probabilità di entrare senza pagare.

Soluzione

Sia P_k la probabilità che ha di vincere il k-esimo della fila e Q_k quella di non vincere.

Ovviamente il primo della fila non può vincere($P_1=0$ e $Q_1=1$), il secondo vince se è nato nello stesso giorno del primo ($P_2=1/365$) e non vince se non è nato ($Q_2=364/365$); il terzo vince se non ha vinto il secondo e se è nato nello stesso giorno di uno dei due $P_3 = 364/365x2/365 = Q_1xQ_2x2/365$. In modo analogo il k-esimo vince se non hanno vinto i precedenti k–1 e se è nato nello stesso giorno di uno dei precedenti quindi $P_k = Q_1xQ_2x\ldots Q_{k-1}x(k-1)/365$.

Tramite la calcolatrice, se sostituiamo a k valori crescenti, il valore di P_k aumenta fino a k = 20, poi diminuisce, quindi conviene mettersi al 20-esimo posto della fila.

Possiamo ottenere il valore massimo anche verificando le disuguaglianze $P_k \geq P_{k-1}$ e $P_k \geq P_{k+1}$, cioè $Q_{k-1}(k-1) \geq k-2$ e $k-1 \geq Q_k k$ e

infine, sostituendo $Q_k = \dfrac{366-k}{365}$ e $Q_{k-1} = \dfrac{365-k}{365}$, si trova:

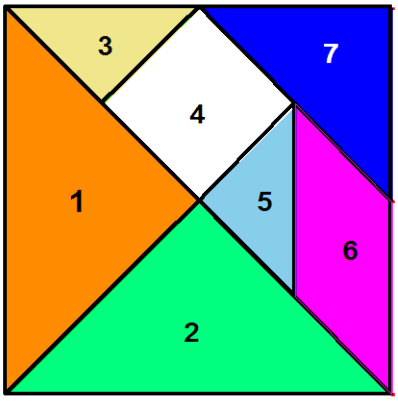
$k^2-3k-363 \leq 0$ e $k^2-k-365 \geq 0$ da cui la soluzione comune $\dfrac{1+\sqrt{1461}}{2} \leq k \leq \dfrac{3+\sqrt{1461}}{2}$ e l'unico intero che la soddisfa è k = 20.

Quesiti a risposta chiusa

4) I *tan* del *Tangram*.

La figura a lato mostra come è fatto un *Tangram,* ovvero l'antico puzzle cinese formato da sette pezzi detti *tan*. Quanti sono i *tan* che hanno lo stesso perimetro di almeno uno degli altri?

A. 2
B. 3
C. 4
D. 5
E. 6 (*)



Soluzione

Fissiamo per comodità il lato del quadrato uguale a 4 cm: i triangoli **1-2** e quelli **3-5** sono congruenti, quindi hanno lo stesso perimetro; il triangolo **7** ha perimetro $(4 + 2\sqrt{2})$ cm come il parallelogramma **6** che ha perimetro $2(2 +\sqrt{2})$ cm = $(4 + 2\sqrt{2})$ cm (risposta E).

---

5) Le cifre "prime" dei numeri "primi"

Un numero primo è formato da tre cifre prime ovvero dalle cifre 3, 5 e 7, anche ripetute. Quanti sono i numeri primi aventi questa proprietà?

A. 5
B. 6 (*)
C. 7
D. 8
E. più di 8

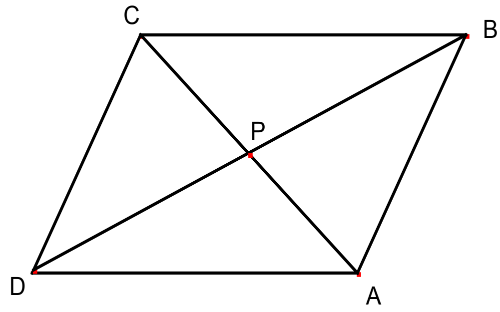
Soluzione

Il numero primo non può terminare per 5 ed essendo 3+5+7 = 15 divisibile per 3, non può essere di cifre diverse (e nemmeno tutte uguali!). I numeri da testare solo allora: 337, 353, 533, 553, 557, 733, 737, 757 e 773; ma 533 = 13 x 41, 553 = 7 x 79 e 737 = 11 x 67. (risposta B)

6) **La proprietà dello zio Pit**

La proprietà dello zio Pit è formata da un parallelogrammo molto esteso nei cui vertici A, B, C e D vi sono le case dei suoi quattro figli Angela, Bruno, Carla e Dario.

Sapendo che la casa dello zio si trova nel centro P del poligono e che AB = 800 m, BC = 1,2 km e AP = 600 m, quanti metri dista la sua casa da quella di Dario?



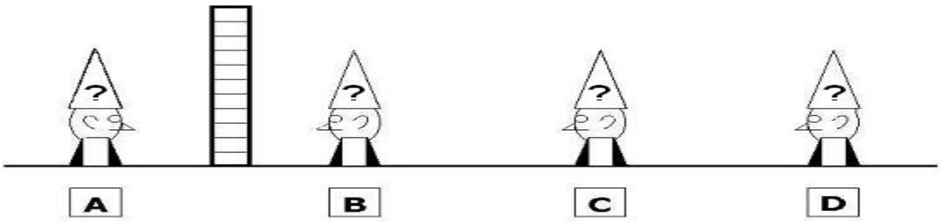
A. Meno di 750 m
B. Fra 750 m e 775 m
C. Fra 775 m e 800 m
D. Fra 800 m e 825 m (*)
E. Più di 825 m

Soluzione

Il triangolo ABC è isoscele, quindi la sua altezza è data da $\sqrt{1200^2 - 400^2} = 800\sqrt{2}$; PD = PB che la mediana del triangolo, quindi PB = $\sqrt{(400\sqrt{2})^2 + 600^2} = 200\sqrt{17}$ ≈824,6 (risposta D).

---

7) **Chi l'ha visto? ... il cappello!**



I quattro concorrenti A, B, C, D della trasmissione televisiva "Chi l'ha visto? ... il cappello!", indossano due cappelli rossi e due verdi, ma non si sa in che ordine e nessuno sa il colore del proprio cappello.
Inoltre sono disposti come in figura, per cui A che è dietro a un muro non vede nulla, B è davanti, ma non può voltarsi e non vede nulla, anche C non può voltarsi, quindi vede solo il colore del cappello di B, mentre D quello dei cappelli di B e C.
Chi indovina entro mezzo minuto il colore del proprio cappello vince un milione di euro!
Nessuno si azzarda a tentare, perché se sbaglia, verrà trapassato da uno spillone nascosto nel cappello.
Ma pochi secondi prima del termine uno dei concorrenti grida: "Il mio cappello è rosso", e vince!
Quale dei concorrenti ha sicuramente un cappello rosso?

A. A
B. B
C. C (*)
D. D
E. Non bastano le informazioni per stabilirlo

Soluzione

Quello che ha più informazioni sul colore dei cappelli è D, ma non può stabilire il colore del proprio avendo davanti B e C due concorrenti che hanno due cappelli di colore diverso; ciò permette a C di conoscere il proprio colore, essendo diverso da quello di B (che vede). Essendo quello di B verde il suo è rosso (risposta C).

---

8) Le tangenti per l'Ex-pro-3M

A Neurolandia, il paese che ha per valuta il Neuro (N€), per un'opera pubblica il presidente Neuroni paga, a sua insaputa, le tangenti sugli appalti alle 3M (tre mafie locali), rispettivamente del 3%, del 4% e del 6%, su quanto stanziato per l'opera.

Incassate le tangenti, le 3M regalano al presidente il 5% di quanto hanno avuto.

Sapendo che Neuroni ha ottenuto in tutto 750.000 N€, a quanto ammontava il valore complessivo dell'opera in milioni di N€?

A. meno di 100
B. tra 100 e 101 (*)
C. tra 101 e 102
D. tra 102 e 103
E. più di 103

Soluzione

Le 3M hanno avuto 0,75/5% = 15 (milioni di N€).
Detto x lo stanziamento abbiamo l'equazione:
3%x + 4%x + 6%x = 15, da cui x = 15/13% = 1500/13 = 115, 38.
Essendo stati pagati 15 milioni per le tangenti, il valore dell'opera è stata di 100,38… milioni di N€ (risposta B).
