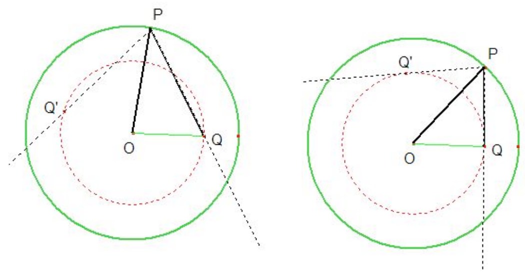
GRAN PREMIO DI MATEMATICA - EDIZIONE 2016 – SOLUZIONI

QUESITI A RISPOSTA APERTA

1) I meli dello zio Pit

Lo zio Pit ha un giardino perfettamente circolare del diametro di 30 metri. Nel centro *O* vi è un rigoglioso melo della varietà Granny Smith e, nel punto *Q*, a 10 metri da *O*, un melo Red Delicious. Per valorizzare le sue culture, Pit vuole posizionare in *P*, sulla circonferenza, un palo con due fari, che illuminino rispettivamente le mele verdi e le mele rosse, il cui angolo $O\hat{P}Q$ sia il maggiore possibile, in modo da ottenere, di sera, uno spettacolare effetto tricolore! Determinate la posizione di *P* sulla circonferenza, giustificandola geometricamente e/o algebricamente.

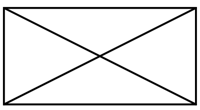


Costruita all'interno del giardino la circonferenza di centro *O* e raggio *OQ*, si tracci la semiretta *PQ*' simmetrica di *PQ* rispetto a *PO*. L'angolo $O\hat{P}Q$ è massimo quando *PQ*' e *PQ* sono tangenti alla circonferenza piccola, quindi l'angolo $O\hat{Q}P$ è retto. Da cui il palo deve essere posto a una distanza *PQ* = √125 metri = 5√5 m ≈ 11,18 m

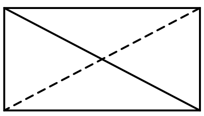
2) Dal film "Vacanze sulla neve" (L.Chiatti, A.Fontana, M.Merlini, A.Merz; M.Laurenti - 1999)

In un albergo a cinque stelle si intrecciano storie di clienti di vario tipo ed estrazione sociale, formando un simpatico gruppo, che di notte si diverte facendo la spola fra Courmayeur e le discoteche di altre tre località vicine: Pré-Saint-Didier, La Tulle, La Salle …

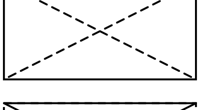
Supponete che i quattro paesi siano collegati a due a due da 6 strade, che di notte potrebbero essere chiuse per neve (al 50%). Qual è la probabilità di poter raggiungere da ogni paese qualunque altro?



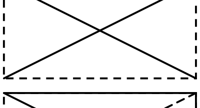
Schematizziamo le strade come i lati e le diagonali di un rettangolo (grafo connesso), con nei vertici i 4 paesi: essi rimangono collegati (connessi) anche se sono chiuse una o due strade.



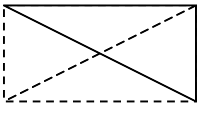
Una sola strada è chiusa: questa configurazione ha 6 possibilità, essendovi 6 strade



Due strade sono chiuse: abbbiamo $\binom{6}{2}$ = 15 possibilità



Se le strade chiuse sono 3, con $\binom{6}{3}$ = 20 possibilità, i 4 paesi sono collegati,



quando le altre tre strade non formano un triangolo; visto che i possibili triangoli sono 4, abbiamo altre 20 – 4 = 16 configurazioni favorevoli.

I casi sono in tutto 1 + 6 + 15 + 16 = 38

Ogni strada è chiusa (o aperta) con p = 1/2, quindi P = 38 $(1/2)^6$ = 19/32 = 59,375%

3) Gli "anni speciali" 2016 e 2017

Quest'anno e il prossimo sono "anni consecutivi speciali": il primo è la differenza di due quadrati ($45^2 - 3^2 = 2016$), il secondo è la somma di due quadrati ($44^2 + 9^2 = 2017$).

Trovate i prossimi "anni consecutivi speciali", determinando una formula algebrica per ottenerli.

Siano n e n+1 gli anni consecutivi;

essi sono "speciali" se $n = x^2 - y^2$ e $n + 1 = z^2 + w^2$,

da cui l'equazione $x^2 + 1 = y^2 + z^2 + w^2$.

Per trovare qualche soluzione intera positiva poniamo $y = x - 1$

da cui $x = (z^2 + w^2)/2$ e $n = z^2 + w^2 - 1$.

Ogni valore intero di z e w, ci fornisce una soluzione al problema:

infatti posto $z = 44$ e $w = 9$,

si trova $n = 2016$, confermando il dato del testo;

posto $z = 43$ e $w = 13$, si trova $n = 2017$,

quindi la prossima coppia di "anni consecutivi speciali" è "2017 e 2018", con $x = 1009$, $y = 1008$ e $1009^2 - 1008^2 = 2017$.

Si possono trovare altre infinite soluzioni ponendo $z = x - 1$.

QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

Quesito n°	4	5	6	7	8
Risposta	**E**	**D**	**A**	**E**	**B**

4) I divisori

E' facile osservare che 2.015 e 2.016 sono numeri composti, mentre 2.017, avendo solo 2 divisori (1 e 2.017) è un numero primo. Quanti divisori ha il numero 2.015x2.016x2.017?

A. meno di 500
B. fra 500 e 525
C. fra 525 e 550
D. fra 550 e 575
E. più di 575

Scomponendo i primi due numeri abbiamo 2.015 = 5x13x31 e 2016 = 2^5x3^2x7.

I tre fattori del primo, formano divisori del tipo d = 5^ax13^bx31^c, con a,b e c di valore 0 o 1, ovvero 2^3 = 8 divisori;
analogamente i tre fattori del secondo, formano divisori del tipo d = 2^ax3^bx7^c,
con a compreso fra 0 e 5,
b compreso fra 0 e 2 e
c di valore 0 o 1,
ovvero 6x3x2 = 36 divisori.

Da questi risultati otteniamo che il numero 2.015x2.016x2.017 ha 8x36x2 = 576 divisori (risposta **E**).

5) Il "numerone" del 2016!

Se moltiplichiamo tutti i numeri interi da 1 a 2016 otteniamo 2016!, che, avendo 5789 cifre, è proprio un gran numerone! Quanti zeri finali ha questo numero enorme?

A. 499
B. 500
C. 501
D. 502
E. 503

Gli zeri finali sono dati da quante volte compare il prodotto 2x5 in 2016!.

Essendo gli esponenti delle potenze di 2 maggiori di quelli delle potenze di 5, basta calcolare il numero di questi ultimi contenuti in 2016!.

Per fare ciò osserviamo che 2016/5 = 403,.. cioè vi sono 403 multipli di 5, 2016/5^2 = 80,.. cioè vi sono 80 multipli di 5^2, 2016/5^3 = 16,.. cioè vi sono 16 multipli di 5^3, 2016/5^4 = 3,.. cioè vi sono 3 multipli di 5^4.

Per "contare" gli esponenti occorre osservare che
i multipli di 5^4 contengono quelli di 5^3,
i multipli di 5^3 contengono quelli di 5^2 e
i multipli di 5^2 contengono quelli di 5,
da cui abbiamo n = 4x3 + 3x(16–3) +2x(80–16) + 403–80 = 502, che è il numero degli zeri (risposta **D**).

6) I campi quadrati di De Matt

Il prof Matteo De Matt ha due fratelli Mattia e Malachia e tutti posseggono un campo perfettamente quadrato avente per lato un numero intero maggiore di 1.
Da esperto matematico, Matteo si accorge che, detti x, y e z i lati dei quadrati, dovrebbero valere le relazioni: $3x^2 + 6 = 10y^2 + 8z^2$ e $2x^2 + 24 = 7y^2 + 5z^2$. Quante soluzioni intere maggiori di 1 ha il relativo sistema?

A. nessuna
B. 1
C. 2
D. 3
E. Infinite

Eliminando la x dal sistema, si trova l'equazione $y^2 - z^2 = 60$, che ha infinite soluzioni reali, ma solo le due coppie $y = 8$, $z = 2$ e $y = 16$, $z = 14$, intere maggiori di 1;

la prima coppia, sostituita in una delle equazioni, ci dà $x^2 = 222$,
l'altra coppia ci dà $x^2 = 1374$;

le relative soluzioni sono irrazionale, quindi il sistema non ha nessuna soluzione (risposta **A**).

7) I quattro amici

Francesco, Laura, Paolo e Nora stanno valutando se partire per una vacanza. Si sa che: se parte Paolo, parte anche Nora; se non parte Francesco non parte nemmeno Nora; se parte Francesco parte anche Laura. Quale delle seguenti affermazioni può essere dedotta?
A. Non parte nessuno
B. Partono tutti
C. Partono Francesco e Laura
D. Se parte Francesco, parte anche Paolo
E. Se non parte Laura, non parte nemmeno Paolo

Dalla terza affermazione si deduce che
"se non parte Laura non parte anche Francesco",
quindi, dalla seconda, "non parte nemmeno Nora"
e quindi dalla prima "non parte Paolo"
(risposta **E**).

8) Il rettangolo e i quadrati

Un rettangolo ha un lato di cm 7. Se aumentiamo la sua diagonale di 1 cm, otteniamo due possibili quadrati, il cui lato è uguale a uno dei lati del rettangolo. Qual è la differenza (in cm^2) delle aree di questi due quadrati?

A. 22

B. 23

C. 24

D. 25

E. Nessuna delle precedenti

Un quadrato ha area di 49 cm^2; per trovare quella dell'altro,
poniamo x (in cm) il lato, quindi la sua diagonale è $x\sqrt{2}$,
mentre la diagonale del rettangolo è $x\sqrt{2} - 1$.
Abbiamo allora l'equazione $x^2 + 7^2 = (x\sqrt{2} - 1)^2$,
cioè $x^2 - 2x\sqrt{2} - 48 = 0$,
da cui la soluzione positiva $x = 6\sqrt{2}$ e $x^2 = 72$.
La differenza delle aree è allora $72cm^2 - 49cm^2 = 23cm^2$
(risposta **B**).