Gran Premio di Matematica Applicata

EDIZIONE 2015 – seconda manche

QUESITI A RISPOSTA APERTA

1) Prodotti magici

Inserite nelle 9 caselle del quadrato i numeri 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48 e 64, in modo che il prodotto di ciascuna delle tre righe, delle tre colonne e delle due diagonali sia sempre lo stesso (ovvero una costante). Si ha un quadrato magico a prodotto costante!
Dopo aver trovato la soluzione, determinate una legge per ottenere tutti i possibili quadrati magici 3 × 3 a prodotto costante.

Risposta

a	b	c
d	**x**	f
g	**h**	**i**

Detto p il prodotto costante e x la cella centrale (che negli otto prodotti è ripetuta più volte), moltiplicando i prodotti delle righe e dividendoli per i prodotti delle diagonali si ottiene $p = x^3$, cioè la costante magica.

La legge generale si ottiene risolvendo prima le quattro equazioni

$axi = x^3$, da cui $a = x^2/i$,

$bxh = x^3$, da cui $b = x^2/h$,

$ghi = x^3$, da cui $g = x^3/hi$,

poi $abc = x^3$,

da cui $c = hi/x$, $cfi = x^3$, da cui $f = x^4/hi^2$, e, infine, $adg = x^3$, da cui $d = hi^2/x^2$.

Il quadrato generale, dipendente da x, h e i, è dato da

x^2/i	x^2/h	hi/x
hi^2/x^2	$\mathbf{x}$	x^4/hi^2
x^3/hi	**h**	**i**

ovvero, senza frazioni,

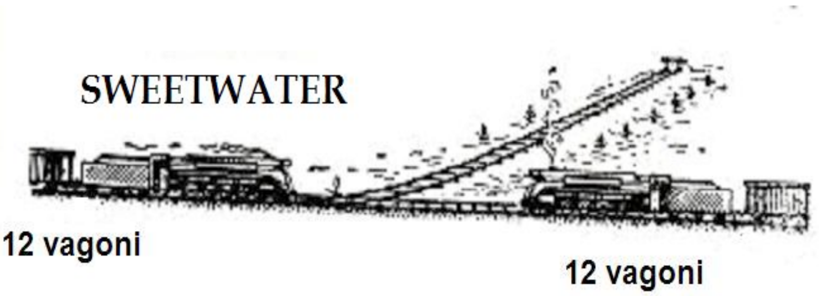
x^4hi	x^4i^2	xh^2i^3
h^2i^4	x^3hi^2	x^6
x^5i	$x^2h^2i^2$	x^2hi^3

Da questa tabella si trova la soluzione particolare per x=2, h=3 e i=1, cioè

48	**16**	**18**
9	**24**	**64**
32	**36**	**12**

2) Dal film “C’era una volta il West” (C.Cardinale, H.Fonda, C.Bronson; S.Leone– 1968)

Sweetwater è un pezzo di terra con l'unica fonte d'acqua della regione ed è al centro di un conflitto fra banditi e avventurieri (Fonda e Bronson), per l’imminente completamento della ferrovia transamericana. Eredita il terreno l’ex prostituta Jill McBain (C.Cardinale), che si oppone con tutte le sue forze alla vendita coatta, al fine di costruire una stazione proprio a Sweetwater .....



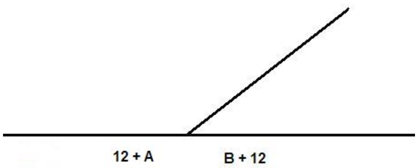
Alcuni anni dopo, terminata la ferrovia, due treni con 12 vagoni ciascuno, si incontrano a Sweetwater da direzioni opposte e sorge il problema di farli passare, utilizzando l’unico binario morto che può contenere solo una locomotiva e 6 vagoni!

Dopo aver propriamente schematizzato la situazione, tenendo conto che entrambe le locomotive possono spingere, tirare, o contemporaneamente spingere e tirare, un qualsiasi numero di vagoni, indicare le operazioni che è necessario compiere per risolvere il problema con il minimo numero di movimenti delle locomotive.

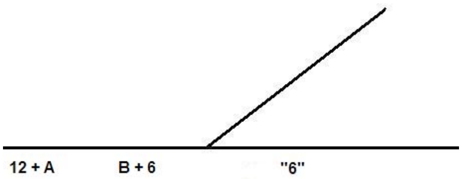
Risposta

Modellizziamo un treno in questo modo: **m + X + n**, dove **X** è la locomotiva, **m** ed **n** sono il numero dei vagoni tirati o spinti dalla stessa in quel momento, **“n”** è il numero di vagoni fermi.

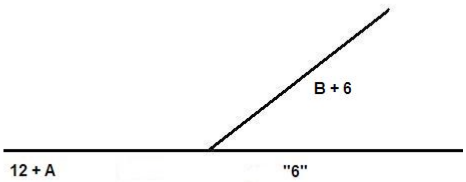
Detta **A** la locomotiva di sinistra e **B** quella di destra, abbiamo gli schemi, con le sottostanti spiegazioni e il conteggio dei movimenti:



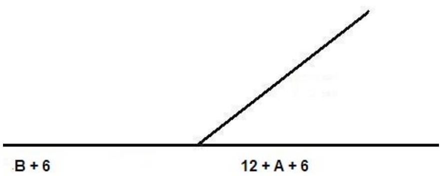
INIZIALE movimenti 0



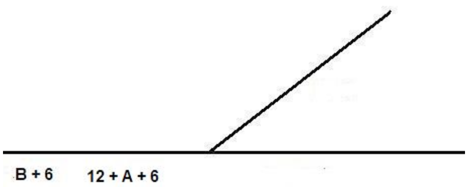
A indietro q.b. e B avanti con 6 vagoni fino a oltre lo scambio. Movimenti 2



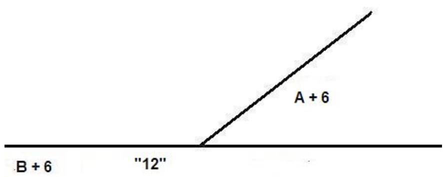
B indietro nel binario morto. Movimenti 1



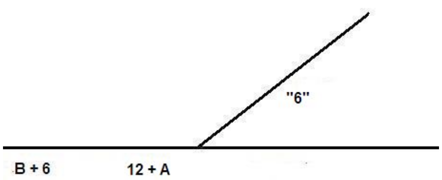
A avanti fino ad agganciare i 6 vagoni di B. B esce dal binario morto e avanza q.b. Movimenti 2



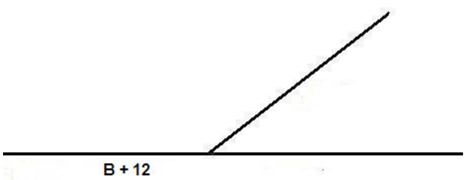
A indietro fino oltre lo scambio. Movimenti 1



A nel binario morto con i 6 vagoni di B. Movimenti 1



A esce dal binario morto senza vagoni, aggancia i suoi 12 e parte libero! Movimenti 1



B entra nel binario morto, aggancia i suoi 6 vagoni e parte libero! Movimenti 1

I movimenti complessivi delle due locomotive sono per tutte le manovre “liberatorie” **2+1+2+1+1+1+1=9**

3) La fortuna del Franco “forte”

Al signor Franco piace la roulette, quindi ogni settimana cambia una certa somma in franchi svizzeri (CHF) e li gioca al casinò di Campione d’Italia.

La sera del 14 gennaio, col cambio 1 EUR = 1,20 CHF, non solo ha vinto in franchi il quadrato di quanto aveva in euro, ma, quando nei giorni seguenti li ha ricambiati (in euro), il cambio era quasi alla pari (1 EUR = 1,02 CHF), per la clamorosa decisione della Banca Centrale Elvetica!

Sapendo che Franco ha avuto una vincita netta di € 68.900, quanti euro aveva cambiato per giocare?

Risposta

Detti **x** gli euro cambiati, Franco ha vinto, in CHF, x^2

e

ha guadagnato sul cambio altri 0,20x CHF.

Abbiamo dunque l’equazione in CHF: $x^2 + 0{,}2x = 1{,}02 \cdot 68.900$,

$x^2 + x/5 = 70.278$,

ovvero

$5x^2 + x - 351.390 = 0$, da cui la soluzione positiva **x = 265.**

QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

4) Gratta e… vincipok!

E' stato emesso da poco un semplice gratta e vinci: il "vincipok". Costa 10 euro e vi sono quattro caselle da grattare: se nelle quattro caselle nascoste compare una moneta vinci 10 euro, se ne compaiono due 30 euro, se ne compaiono tre 60 euro e, infine, se ne compaiono quattro 100 euro. Quanto deve essere, al minimo, la probabilità di uscita di una moneta, affinché il gioco sia conveniente?

A. meno del 18%
B. fra il 18% e il 19%
C. fra il 19% e il 20%
D. fra il 20% e il 21%
E. più del 21%

Risposta

Detta **p** la probabilità di uscita di una moneta,

la vincita media risulta essere:

$100 \cdot p^4 + 4 \cdot 60 \cdot p^3 \cdot (1-p) + 6 \cdot 30 \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 \ + 4 \cdot 10 \cdot p \cdot (1-p)^3$

e, per essere conveniente,

deve risultare maggiore di 10 (che è il costo del gratta e vinci).

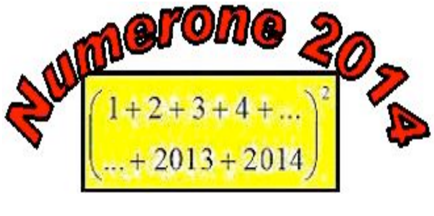
Sviluppando i calcoli abbiamo la disuguaglianza

$60p^2 + 40p > 10$,

ovvero

$6p^2 + 4p - 1 > 0$ da cui $p > \dfrac{\sqrt{10}-4}{6}$ = 0,1937… (**risposta C**).

5) Il "numerone" del 2014!



Se sommiamo tutti i numeri da 1 a 2014 ed eleviamo al quadrato il risultato, troviamo un "numerone" uguale a:

A. la somma dei quadrati da 1 a 4028
B. la somma dei cubi da 1 a 2014
C. la somma delle quarte potenze da 1 a 1007
D. la differenza fra il risultato C e il risultato A
E. la differenza fra il risultato C e il risultato B

Risposta

Anche senza sommare tutti i numeri,

il quadrato della somma di n numeri da 1 a n è uguale alla somma dei cubi degli stessi,

quindi la risposta è **B.**

6) Gli orologi matti di De Matt

Il prof Matteo De Matt ha due orologi “matti”, nel senso che uno anticipa di un minuto ogni ora e l’altro ritarda di un minuto e mezzo ogni ora! Nel momento in cui le lancette dei due orologi si trovano nella stessa posizione (poco più delle 10 come in figura), De Matt mette il primo al polso destro e il secondo al polso sinistro, decidendo di toglierli quando ciò capiterà di nuovo. Dopo quanti giorni potrà togliere gli orologi?

A. 6
B. 12
C. 24
D. 36
E. 60

Risposta

Gli orologi segneranno la stessa ora quando avranno anticipato e ritardato di 12 h = 720 minuti; detto **x** (in ore) il tempo richiesto,

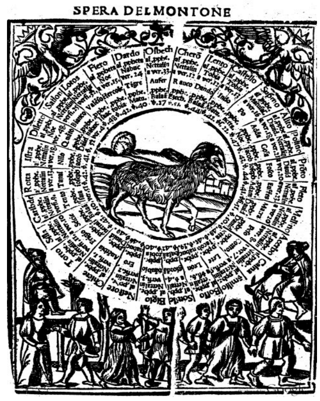
il primo orologio anticipa di x minuti e il secondo ritarda di 1,5x minuti;

si ha dunque l’equazione $x + 1{,}5x = 720$,

da cui x = 288, ovvero 288/24 = **12 giorni**.
(**risposta B**)

7) L’ANNO “diabolico”

SPERA DEL MONTONE



Alcuni matematici “matemagici” hanno notato che un particolare anno del passato o del futuro ha la seguente proprietà diabolica:
considerate A, N e O cifre da numeriche,

$$ANNO_{\text{scritto in base 5}} + ANNO_{\text{scritto in base 7}} = ANNO_{\text{scritto in base 8}}.$$

Di quale anno si tratta?

A. 1442
B. 2003
C. 3110
D. 4223
E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

Risposta

Tenuto conto delle basi, con le condizioni $0 < A \le 4$, $0 \le N \le 4$ e $0 \le O \le 4$,
l’equazione diventa:

$$(125A+25N+5N+0) + (343A+49N+7N+0) = (512A+64N+8N+0)$$

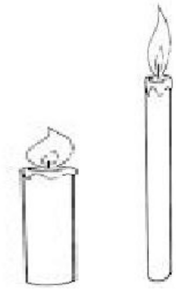
ovvero $O = 2(22A-7N)$, da cui l’unica soluzione A=1, N=3 e O=2.

L’anno diabolico è 1332. (**risposta E**)

Oppure,
utilizzando efficacemente la calcolatrice (cambiamenti di base), è immediato verificare che nessuna delle uguaglianze: $1442_5 + 1442_7 = 1442_8$,
$2003_5 + 2003_7 = 2003_8$,
$3110_5 + 3110_7 = 3110_8$
e $4223_5 + 4223_7 = 4223_8$ è soddisfatta!

8) Le due candele

Una candela è di 75 cm e si consuma completamente in 5 ore, una seconda è più alta, ma essendo di diametro minore, dura solo 3 ore e 30 minuti. Sapendo che, se sono state accese contemporaneamente, dopo due ore hanno la stessa altezza, quanto era alta in cm la candela più sottile? (Si suppongano le candele perfettamente cilindriche e che la cera si consumi uniformemente nel tempo)



A. 95
B. 105
C. 120
D. 130
E. 135

Risposta

Dopo due ore la prima candela riduce il proprio volume di 2/5,
quindi ne rimangono i 3/5,
ovvero,
detto R il suo raggio (in cm), $V_1 = 3/5 \cdot 75\pi R^2 cm^3 = 45\pi R^2 cm^3$,

di conseguenza dopo due ore è alta 45 cm;

analogamente la seconda alta x e di raggio r lo riduce di 2/3,5 = 4/7
e ne rimangono i 3/7 ovvero $V_2 = 3/7 \cdot \pi x r^2 cm^3$.

Sappiamo che dopo due ore esse hanno la stessa altezza,

ovvero $3/7 \cdot x = 45$, da cui **x = 105** (**risposta B**).