GRAN PREMIO DI MATEMATICA APPLICATA - EDIZIONE 2022
SOLUZIONI

Quesito n°	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	9x15 = 135 €, 9x20 =180 € 9x22 = 198 €	65,80%	124 alberi	B	E	E	A	A

1) Il guardaroba dello zio Pit

È tempo di saldi e lo zio Pit decide di farsi un nuovo guardaroba. Compra 13 capi di vestiario, fra camicie, giacche e pantaloni (almeno uno per tipo), con in omaggio un appendiabiti da pavimento, spendendo in tutto 660 euro. Sappiamo che: 4 giacche costano come 9 pantaloni, un pantalone costa come 4 camicie (tutti valori interi di euro) e una camicia costa più di 12 euro. Determinare il costo di una giacca.

Posto x il numero delle camicie,
y quello dei pantaloni,
z quello delle giacche,
C il costo di una camicia,
P quello di un pantalone e
G quello di una giacca,

da 4G = 9P, P = 4C, abbiamo le due equazioni

$$x + y + z = 13,$$
$$Cx + 4Cy + 9Cz = 660, \text{ con } C > 12.$$

La seconda equazione si può scrivere $C(x + 4y + 9z) = 660$
ed essendo C>12 intero, deve essere divisore di 660, da cui C=15, C=20, C=22, ...

Sostituendo e dividendo tali valori, abbiamo, nell'ordine:
$x + 4y +9z = 44$, $x + 4y +9z = 33$, $x + 4y +9z = 30$;

da queste equazioni sottraiamo la prima e otteniamo
$3y +8z = 31$, $3y +8z = 20$, $3y +8z = 17$.

Tutte e tre hanno uniche soluzioni intere e positive, rappresentate dalle coppie
$(y; z) = (5; 2)$, $(y; z) = (4; 1)$ e $(y; z) = (3; 1)$,
quindi, nei tre casi, le giacche costano in euro 9x15 = 135, 9x20 = 180 e 9x22 = 198.

(Non possono essere trovate altre soluzioni, perché, se C=30, si avrebbe $x + 4y +9z = 22$, da cui $3y+8z = 9$, che non ha soluzioni intere e positive e, a maggior ragione, se $C > 30$).

2) Dal film "La stangata" (Robert Redford e Paul Newman George Roy Hill – 1973)

Johnny Hooker (Redford) e il suo amico Luther, truffatori di strada, hanno raggirato il potente gangster Doyle Lonnegan. Per ritorsione Luther viene ucciso e Hooker, per vendicarsi, chiede aiuto ad un vecchio amico, Henry Gondorff (Newman), uno dei più grandi allibratori e truffatori degli Stati Uniti. Insieme organizzano una truffa (La stangata) ai danni di Lonnegan, creando una finta agenzia di scommesse… Si scommetteva proprio su tutto, anche sul lancio di una moneta d'oro sul pavimento: se, entro due tentativi, la moneta si fermava incrociando i lati delle piastrelle quadrate, se ne vinceva un'altra, altrimenti essa veniva persa, ovvero presa dal banco. Qual è la probabilità di vincere la moneta d'oro, sapendo che le piastrelle hanno un lato di 17 cm e che le monete hanno un diametro di 4 cm?

La moneta non tocca i bordi della piastrella se il suo centro si ferma nel quadrato, concentrico ad essa, di lato cm(17□4), che ha un'area di 169cm^2.

La probabilità di non incrociare i bordi è allora: 169cm^2/289cm^2 = 169/289 = 58,48%.

Essendo disponibili due tentativi,
la probabilità di vincere la moneta diventa: 1 □ (169/289)^2 = 65,80%.

3) Green Garden a Mathemandia

Nello stato di Mathemandia, dove è in uso, come sistema di riferimento, solamente quello cartesiano ortogonale a coordinate intere, la cui unità di misura è il MathMetro (circa 25,1 yards), deve essere piantumato un giardino recintato di 125 MathMetriquadri esatti. Esso ha la forma di un triangolo rettangolo isoscele, con i tre vertici di coordinate intere e gli alberi devono essere piantati, all'interno del recinto, in punti aventi sempre le coordinate intere. Dopo aver modellizzato il problema con opportune equazioni e/o grafici cartesiani, determinate il massimo numero di alberi che è possibile piantare.

Nel piano cartesiano il triangolo rettangolo isoscele OAB
ha coordinate O(0; 0), A(x;–y) e B(y; x) con x e y interi e positivi.

Essendo OA^2= OB^2 = $x^2 + y^2$, la sua area è $(x^2+y^2)/2$,
da cui abbiamo l'equazione $x^2 + y^2 = 250$,
che ammette solo due soluzioni (simmetriche): (x; y) = (15; 5) e (x; y) = (13; 9), ovvero i due triangoli O, A(15; –5), B(5; 15) e O, A(13; –9), B(9; 13).

Per evitare di "contare" materialmente i punti interni (a coordinate intere) dei due triangoli, notiamo che il primo ha come lati le rette x = –3y = 0, y = 3x e y = 25 – 2x, le quali, oltre che per i vertici, passano per altri 17 punti a coordinate intere ($1 \le y \le 4$, $1 \le x \le 4$ e $6 \le x \le 14$),

sappiamo che l'area è 125, quindi, per il teorema di Pick, i punti interni sono
125 – (3+17)/2 + 1 = 116.

Nel caso del secondo triangolo, essendo 9 e 13 primi fra loro, i lati OA e OB non hanno altri punti a coordinate intere (oltre ai vertici), mentre il lato AB ha intero solo il punto medio M(11; 2), i punti interni sono allora 125 − (3+1)/2 + 1 = 124, che è il massimo cercato.

4) Il gioco delle tre carte

Nel gioco delle tre carte (coperte, diverse e senza imbrogli!), il giocatore mette una somma di denaro su una delle tre carte e vince quella somma, se è la carta più alta. Fortunato, che dispone di 70 euro, ne vuole vincere 10, quindi adotta la seguente strategia: punta 10 € e, se vince, si ritira; se perde, punta 20 € e, se vince, si ritira; se perde, punta 40 € e, ovviamente, smette in ogni caso. Qual è la probabilità che Fortunato vinca 10 €?

A. meno del 70%
B. **fra il 70% e il 72,5%**
C. fra il 72,5% e il 75%
D. fra il 75% e il 77,5%
E. più del 77,5%

La probabilità di vincere la prima volta è 1/3 (e quella di perdere 2/3);
al secondo tentativo diventa 2/3·1/3 = 2/9,
al terzo tentativo 2/3·2/3·1/3 = 4/27.
La probabilità totale risulta 1/3+2/9+4/27 = 19/27 = 0,7037... = 70,37% (risposta B).

5) Un baricentro “diversamente stabile”

Il baricentro del perimetro di un triangolo, cioè del suo contorno costituito solo dai tre lati, senza considerare la parte interna, è dato da:

A. Il baricentro dei tre vertici
B. Il baricentro dei punti medi dei lati
C. Il punto di incontro delle mediane
D. Il punto di incontro delle bisettrici
E. **Nessuna delle risposte precedenti è esatta**

Il baricentro dei tre vertici è il baricentro di tutto il triangolo, quindi le risposte A e C sono false; i punti medi dei lati sono i baricentri dei lati, il loro baricentro coincide col baricentro del perimetro, solo se i lati sono uguali, allora anche la B è falsa;
il punto di incontro delle bisettrici è l’incentro, quindi nessuna delle risposte precedenti è esatta (risposta E).

6) Tre coppie in “fila”

Tre coppie di fidanzati, vogliono farsi ritrarre in un'unica foto, sedendosi su 6 sedie allineate, ma le coppie, ovviamente, non vogliono essere separate. Quante posizioni diverse possono scegliere nella foto?

A. 6
B. 12
C. 24

D. 36
E. **48**

Le tre coppie dovendo stare vicine occupano tre posizioni, quindi hanno $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilità diverse, ma in ogni coppia l'uomo può stare a destra oppure a sinistra, quindi per le tre coppie abbiamo $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ possibilità.
In definitiva le posizioni diverse sono $6 \cdot 8 = 48$ (risposta E).

7) La scuola media

In una scuola media il 32% di tutti gli alunni frequenta la prima, il 27% delle femmine la seconda e il 38% dei maschi la terza. Quale di queste affermazioni è sicuramente falsa?

A. I maschi di seconda e le femmine di terza sono complessivamente più del 41% di tutti gli alunni
B. I maschi di seconda e le femmine di terza sono complessivamente meno del 31% di tutti gli alunni
C. in prima vi sono meno della metà dei maschi che in seconda
D. in seconda vi sono meno femmine che in terza
E. la scuola è tutta maschile

Detto M e F il numero dei maschi e delle femmine della scuola,
x quello dei maschi di seconda e
y quello delle femmine di terza,
abbiamo l'equazione:

$32\%(M+F) + (27\%F + x) + (38\%M + y) = M+F$
da cui $x+y = 30\%M + 41\%F$;
ma poiché, $30\%M + 41\%F = 41\%(M+F) – 11\%M \leq 41\%(M+F)$,
si ha $x+y \leq 41\%(M+F)$
quindi è sicuramente falso che sia $x+y > 41\%(M+F)$,
indipendentemente dai valori di M, F, x e y, che possono rendere vere le altre quattro affermazioni. (risposta A).

8) Le merendine FarcyKimik

Una scatola di 10 merendine FarcyKimik costa € 2,20. Da diversi anni ogni scatola contiene un "bollino premio", che ti permette di ricevere, con 12 bollini, una scatola di merendine in regalo. Sapendo che anche la scatola gratuita contiene un bollino, qual è il costo effettivo in centesimi di un FarcyKimik?

A. 20
B. 20,1
C. 20,2
D. 20,3
E. più di 20,3

Se la scatola omaggio non contenesse il bollino, comprando 12 scatole (€ 26,40) avremmo 130 merendine e ogni merendina costerebbe 2.640/130 = 264/13 = 20,307... (cent).

Ma anche le scatole omaggio, essendo uguali alle altre, hanno il bollino, quindi il costo effettivo è minore.

Un bollino equivale a $1/12$ di scatola, che avendo un bollino, si avrà ancora $1/12^2 = 1/144$ di scatola, e poi ancora $1/12^3$, $1/12^4$ di scatola e così via.

La somma (infinita) $1/12 + 1/12^2 + 1/12^3 + 1/12^4 + \dots$ è uguale a $1/11$, quindi il costo effettivo in centesimi di una scatola è $220 – 220/11 = 200$ e di un FarcyKimik 20 (risposta A).