

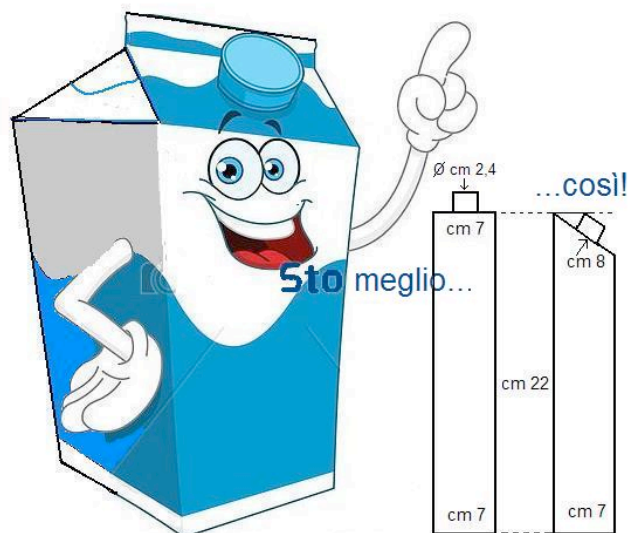
Gran Premio di Matematica Applicata

EDIZIONE 2016/17 – seconda manche

QUESITI A RISPOSTA APERTA

1) Il latte “storto”

In un cartone di latte, a base quadrata, con lato di cm 7, il tappo “apri e chiudi” si trova sulla faccia superiore in posizione delicata, in quanto, nella sovrapposizione delle scatole è soggetto a possibili rotture. Qualche produttore, per ovviare a ciò, ha pensato di inclinare la faccia superiore, che diventa un rettangolo con un lato di cm 8, in modo di proteggere il tappo e anche facilitare il versamento del latte. Si supponga che il tappo sia un cilindro di diametro di cm 2,4, centrato nel rettangolo e che sia perfettamente “a filo” con l'altezza (cm 22) del cartone di latte per avere la protezione massima nella sovrapposizione. Qual è la superficie totale e il volume del solido ottenuto, compreso il tappo?



2) Sette spose per sette cognati - libera variazione del film "Sette spose per sette fratelli" (J.Powell, H.Keel, J.Richards; Stanley Donen - 1954)
Sette tizi Antonio, Bruno, Carlo, Dario, Enzo, Franco e Gianni sono convolati a nozze con Antonia, Bruna, Carla, Daria, Enza, Franca e Gianna, ma non in quell'ordine, visto che il nome della sposa è diverso (al femminile) dal nome dello sposo: si sa solo che Bruno è il marito di Gianna e Antonia è la moglie di Dario. Ogni donna è sorella di uno degli uomini, ma non ha lo stesso nome, e neppure ha il nome del marito o del fratello di una delle sue due cognate. Sappiamo che Gianni è cognato di Antonio e Franco, Carlo di Dario ed Enzo, mentre Gianna è cognata di Enza e Antonia; è infine noto che la sorella di Bruno si chiama come il marito di Bruna. Dopo aver opportunamente schematizzato la situazione, si costruisca un modello che rappresenti inequivocabilmente il quadro globale dei matrimoni.



3) L'investimento fruttuoso

Paolo aveva investito esattamente 1.000 euro in due tipi di azioni: "Pagoben" a € 7,70 ciascuna e "Speroben" a € 3,90 ciascuna. Per un certo periodo la "Pagoben" ha avuto un andamento oscillante, ma la "Speroben" continuava a perdere. Durante le conseguenze di "terremoti borsistici" dovuti a elezioni mondiali e referendum nazionali, la "Speroben" è improvvisamente salita a € 4,00 e, tenuto conto che in quel periodo anche la "Pagoben" era aumentata, Paolo vende tutto, guadagnando almeno una modesta cifra. Paolo però non è pago, avendo comunque il rammarico di constatare che, se avesse comprato, sempre con i 1.000 euro, più "Pagoben" e meno "Speroben", avrebbe guadagnato esattamente il doppio. Quanto ha guadagnato Paolo e a quanto ha venduto le "Pagoben"?



QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

4) Al quadrato si cambia

Un numero intero ha le cifre tutte uguali, ma se lo elevo al quadrato le ha tutte diverse! Quanti interi hanno tale proprietà?

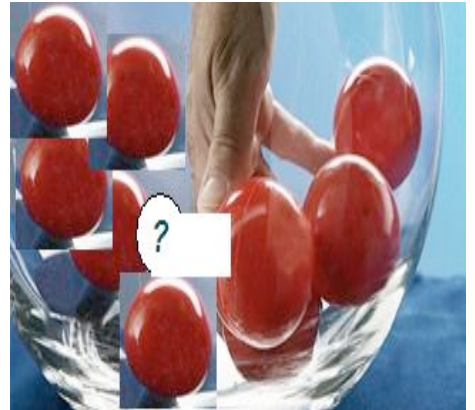
- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6
- E. nessuna delle precedenti

$$44444^2 = 19752??36$$
$$??? = 840 ?$$

5) Urne rosse

Un'urna contiene più di 10 palline, ma meno di 50, tutte uguali salvo il colore. La probabilità di pescarne una rossa è del 20%, ma se aggiungo nell'urna alcune palline rosse e una nera tale probabilità aumenta a $\frac{4}{9}$. Quante palline rosse ho aggiunto?

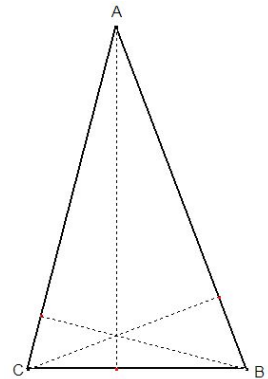
- A. 14
- B. 17
- C. 20
- D. 22
- E. 25



6) Le tre altezze

Un triangolo scaleno, ha le tre altezze espresse da tre numeri interi (in cm). Due altezze sono cm 6 e cm 30. Qual è l'area di tale triangolo espressa in cm^2 ?

- A. meno di 90
- B. fra 90 e 110
- C. fra 110 e 130
- D. più di 130
- E. non si può trovare in quanto manca un dato



7) Le tre tribù

Sinclunabugi è una sperduta isoletta del Pacifico abitata da tre tribù: i Sinceri che dicono sempre la verità, i Lunatici che mentono solo di lunedì e i Bugiardi che mentono sempre. Un esploratore incontra quattro indigeni e chiede loro che giorno è; le risposte sono state nell'ordine:

- 1) oggi è lunedì
- 2) chi ha parlato prima di me mente
- 3) oggi è venerdì
- 4) io sono un Lunatico oppure chi ha parlato prima di me mente

Qual è il massimo numero di Lunatici che l'esploratore potrebbe aver incontrato ?

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3
- E. 4



8) Gli scacchi di Neurolandia

Anche a Neurolandia esistono gli scacchi, ma i pezzi sono sostanzialmente diversi, per fare “impazzire” i giocatori. Uno di questi è il *tor-pedone*, a cui è permesso fare sia le mosse della *torre* (avanti o indietro di una o più caselle, lungo le righe o le colonne), sia le mosse della *pedina della dama* (solo in diagonale, di una casella e verso l'alto). Se un *tor-pedone* si trova nella casella in basso a sinistra, può raggiungere la casella in alto a destra in sole due mosse (come una torre su una riga e una colonna); se invece si limitano le mosse della torre a 20, qual è il massimo numero di mosse necessarie per ottenere lo stesso risultato?

- A. meno di 100
- B. fra 101 e 125
- C. fra 126 e 145
- D. fra 146 e 165
- E. più di 165



GRAN PREMIO DI MATEMATICA - EDIZIONE 2016/17 – SOLUZIONI

Quesito n°	1	2	3	4	5	6	7	8
Risposta	V=990, S_t=678,46	grafo	g=62,50 v=9,50	E	A	D	C	E

1) Il latte “storto”

In un cartone di latte, a base quadrata, con lato di cm 7, il tappo “apri e chiudi” si trova sulla faccia superiore in posizione delicata, in quanto, nella sovrapposizione delle scatole è soggetto a possibili rotture. Qualche produttore, per ovviare a ciò, ha pensato di inclinare la faccia superiore, che diventa un rettangolo con un lato di cm 8, in modo di proteggere il tappo e anche facilitare il versamento del latte. Si supponga che il tappo sia un cilindro di diametro di cm 2,4, centrato nel rettangolo e che sia perfettamente “a filo” con l’altezza (cm 22) del cartone di latte per avere la protezione massima nella sovrapposizione. Qual è la superficie totale e il volume del solido ottenuto, compreso il tappo?

Il solido, senza tappo, è un parallelepipedo di volume $V = \text{cm}^3 7^2 \times 22 = \text{cm}^3 1.078$ a cui è stato tolto un prisma triangolare retto, alto cm 7 e avente per base un triangolo rettangolo; questo triangolo ha un cateto di cm 7, l’ipotenusa di cm 8, l’altro cateto è $\text{cm} \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}$, quindi la sua area è $\text{cm}^2 \frac{7\sqrt{15}}{2}$ e il volume del solido è $V_s = \text{cm}^3 (1.078 - \frac{7^2 \sqrt{15}}{2}) = \text{cm}^3 \frac{2156 - 49\sqrt{15}}{2} \approx \text{cm}^3 983$.

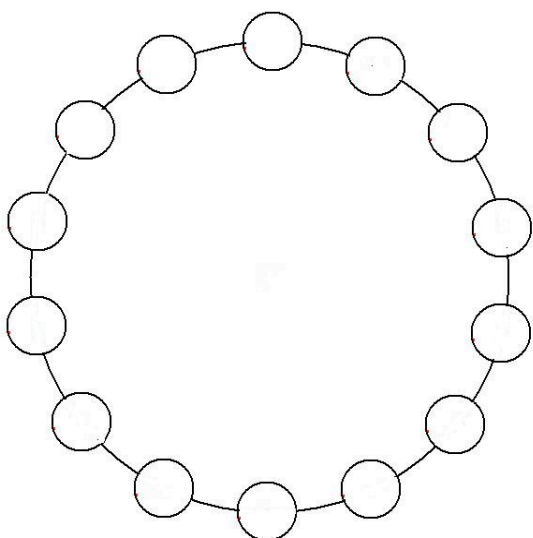
La sua superficie totale è formata da sei facce: un quadrato di $\text{cm}^2 7^2$, un rettangolo di $\text{cm}^2 7 \times 22$, un rettangolo di $\text{cm}^2 7 \times (22 - \sqrt{15})$, un rettangolo di $\text{cm}^2 7 \times 8$ e, infine, da due trapezi uguali di area complessiva $\text{cm}^2 7 \times (22 + 22 - \sqrt{15})$, da cui $S_t = \text{cm}^2 7(103 - 2\sqrt{15}) \approx \text{cm}^2 666,78$.

L’altezza h del tappo forma, col cateto di cm $(4 - 1,2) = \text{cm} 2,8$, un triangolo rettangolo simile a quello sopra considerato, quindi, dalla proporzione $\frac{h}{2,8} = \frac{\sqrt{15}}{7}$, si trova $h = \text{cm} \frac{2\sqrt{15}}{5}$, da cui il volume del tappo è $V = \text{cm}^3 \frac{72\pi\sqrt{15}}{125} \approx \text{cm}^3 7$ e la sua superficie laterale è $S_l = \text{cm}^2 \frac{24\pi\sqrt{15}}{25} \approx \text{cm}^2 11,68$.

Il solido col tappo ha il **volume V = cm³ 990** e la **S_t = cm² 678,46**.

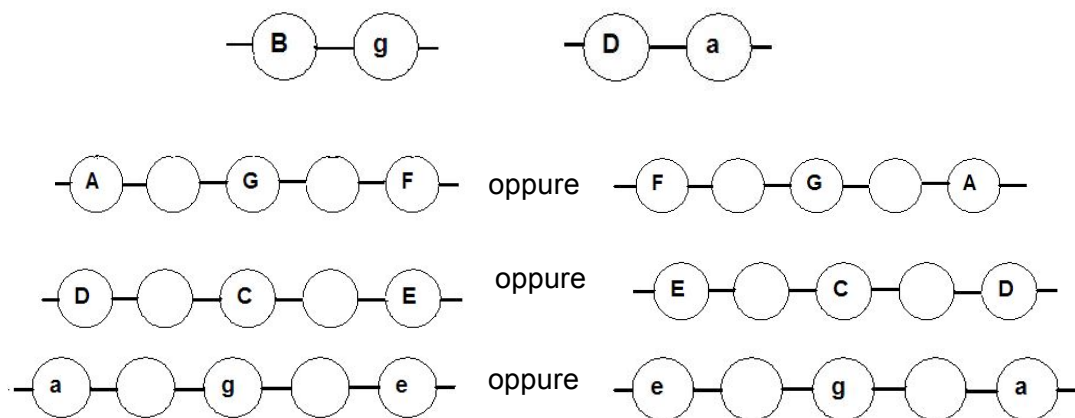
2) Sette spose per sette cognati - libera variazione del film “Sette spose per sette fratelli” (J.Powell, H.Keel, J.Richards; Stanley Donen - 1954)

Sette tizi Antonio, Bruno, Carlo, Dario, Enzo, Franco e Gianni sono convolati a nozze con Antonia, Bruna, Carla, Daria, Enza, Franca e Gianna, ma non in quell’ordine, visto che il nome della sposa è diverso (al femminile) dal nome dello sposo: si sa solo che Bruno è il marito di Gianna e Antonia è la moglie di Dario. Ogni donna è sorella di uno degli uomini, ma non ha lo stesso nome, e neppure ha il nome del marito o del fratello di una delle sue due cognate. Sappiamo che Gianni è cognato di Antonio e Franco, Carlo di Dario ed Enzo, mentre Gianna è cognata di Enza e Antonia; è infine noto che la sorella di Bruno si chiama come il marito di Bruna. Dopo aver opportunamente schematizzato la situazione, si costruisca un modello che rappresenti inequivocalmente il quadro globale dei matrimoni.

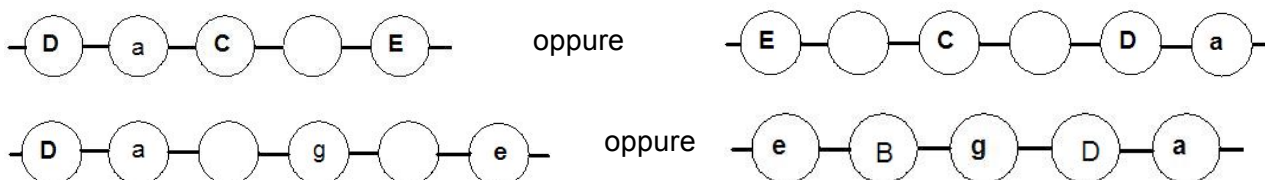


Un modello risolutivo del problema può essere rappresentato da un grafo circolare nei cui vertici vi sono le iniziali dei 14 nomi alternati uomo-donna, maiuscole per gli uomini e minuscole per le donne, rispettando la condizione che una lettera minuscola deve distare dalla corrispondente maiuscola di almeno 4 vertici. Percorrendo il grafo in senso orario si leggono le mogli e i fratelli, in senso antiorario i mariti e le sorelle, per questo i cognati e le cognate risultano collegati a tre a tre da moglie e sorella o da marito e fratello. Il problema è risolto quando si sono riempiti tutti i vertici, disponendo nel grafo opportuni “sottografi”, dedotti dai dati del problema.

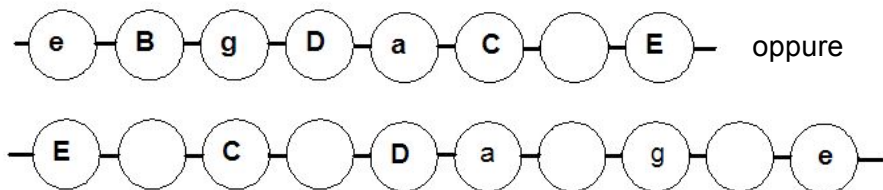
Essi, orientati in senso orario, sono i seguenti:



I primi due sottografi si “infilano” negli ultimi due formando le seguenti catene:



che si possono ricombinare in uno solo di questi due modi:

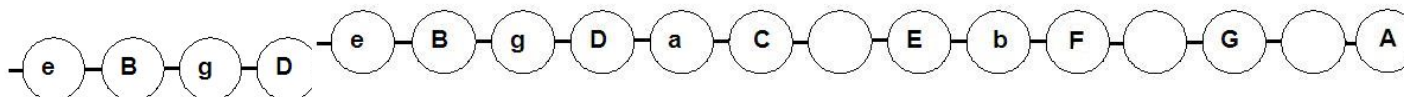


che però è incompatibile con i sottografi dei cognati di G.

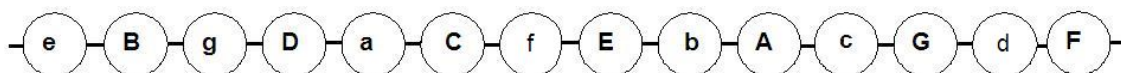
Il primo di questi ci dice che la sorella di “B” è “e”, quindi il marito di “b” è “E” e il sottografo diventa:



e, aggiungendo i sottografi dei cognati di G, si ottengono due grafi completi di 14 vertici, in cui occorre inserire, nei cerchi vuoti, i nomi delle tre mogli mancanti “c”, “d” e “f”, ovviamente coerenti con i dati del problema



Procedendo come suggerito abbiamo la **prima soluzione**:



Essa è unica in quanto nell'altro grafo è impossibile inserire “c”, “d” e “f” a distanza di almeno 4 vertici dalla corrispondente maiuscola.

3) L'investimento fruttuoso

Paolo aveva investito esattamente 1.000 euro in due tipi di azioni: "Pagoben" a € 7,70 ciascuna e "Speroben" a € 3,90 ciascuna. Per un certo periodo la "Pagoben" ha avuto un andamento oscillante, ma la "Speroben" continuava a perdere. Durante le conseguenze di "terremoti borsistici" dovuti a elezioni mondiali e referendum nazionali, la "Speroben" è improvvisamente salita a € 4,00 e, tenuto conto che in quel periodo anche la "Pagoben" era aumentata, Paolo vende tutto, guadagnando almeno una modesta cifra. Paolo però non è pago, avendo comunque il rammarico di constatare che, se avesse comprato, sempre con i 1.000 euro, più "Pagoben" e meno "Speroben", avrebbe guadagnato esattamente il doppio. Quanto ha guadagnato Paolo e a quanto ha venduto le "Pagoben"?

Detta x e y il numero delle azioni acquistate, abbiamo l'equazione $77x + 39y = 10.000$, che ha solo due soluzioni intere positive $x = 23$ e $y = 211$ oppure $x = 62$ e $y = 134$; posto g il guadagno e z il prezzo di vendita delle 23 "Pagoben", abbiamo l'equazione $23z + 211 \cdot 4 = g + 1.000$, da cui $g = 23z - 156$. Se di "Pagoben" ne avesse comprate 62, avremmo l'equazione $62z + 134 \cdot 4 = 2(23z - 156) + 1.000$, che risolta ci dà $z = 19/2$ e quindi $g = 125/2$. **Vendendo le "Pagoben" a € 9,50, Paolo ha guadagnato € 62,50.**

4) Al quadrato si cambia

Un numero intero ha le cifre tutte uguali, ma se lo elevo al quadrato le ha tutte diverse! Quanti interi hanno tale proprietà?

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6
- E. nessuna delle precedenti (*)

Il numero deve avere meno di sei cifre, altrimenti il suo quadrato ne avrebbe più di 10 e almeno una cifra si ripeterebbe, quindi il numero intero si può scrivere nei soli quattro modi: $11x$, $111x$, $1111x$ e $11111x$, dove x è la cifra uguale. Assegnando a x i valori da 2 a 9, abbiamo i casi I: $33^2 = 1089$, $44^2 = 1936$, $55^2 = 3025$, $66^2 = 4356$ e $99^2 = 9801$, II: $777^2 = 603729$, III: $7777^2 = 60481729$ e IV: nessuno. Pertanto **le soluzioni sono sette (risposta E)**.

5) Urne rosse

Un'urna contiene più di 10 palline, ma meno di 50, tutte uguali salvo il colore. La probabilità di pescarne una rossa è del 20%, ma se aggiungo nell'urna alcune palline rosse e una nera tale probabilità aumenta a $4/9$. Quante palline rosse ho aggiunto?

- A. 14 (*)
- B. 17
- C. 20
- D. 22
- E. 25

Detto n il numero delle palline e r quello delle rosse, che è il 20%, si trova $n = 5r$; detto x il numero delle palline rosse aggiunte, abbiamo l'equazione $\frac{r+x}{5r+x+1} = \frac{4}{9}$, ovvero $5x - 11r = 4$, che ha infinite

soluzioni positive $x = 3+11k$, $r = 1+5k$ con k intero ≥ 0 . Essendo $10 < n < 50$, si ha $2 < r < 10$, da cui $2 < 1+5k < 10$, $1/5 < k < 9/5$, ma k è intero, quindi l'unica **soluzione è $k = 1$ e $x = 14$ (risposta A)**.

6) Le tre altezze

Un triangolo scaleno, ha le tre altezze espresse da tre numeri interi (in cm). Due altezze sono cm 6 e cm 30. Qual è l'area di tale triangolo espressa in cm^2 ?

- A. meno di 90
- B. fra 90 e 110
- C. fra 110 e 130
- D. più di 130 (*)

E. non si può trovare in quanto manca un dato

Detta h la terza altezza, i tre lati sono proporzionali a $1/h$, $1/6$ e $1/30$, quindi abbiamo la disuguaglianza: $1/6 - 1/30 < 1/h < 1/6 + 1/30$, da cui $2/15 < 1/h < 1/5$ cioè $5 < h < 7,5$. Essendo h un numero

intero, abbiamo solo 2 possibilità: $h=6$ e $h=7$, ma nel primo caso sarebbe un triangolo isoscele, per questo l'unica soluzione è $h=7$, da cui si ricava **$S = 139,30 \text{ cm}^2$ (risposta D)**.

7) Le tre tribù

Sinlunabugi è una sperduta isoletta del Pacifico abitata da tre tribù: i Sinceri che dicono sempre la verità, i Lunatici che mentono solo di lunedì e i Bugiardi che mentono sempre. Un esploratore incontra quattro indigeni e chiede loro che giorno è; le risposte sono state nell'ordine:

- 1) oggi è lunedì
- 2) chi ha parlato prima di me mente!
- 3) oggi è venerdì
- 4) io sono un Lunatico oppure chi ha parlato prima di me mente!

Qual è il massimo numero di Lunatici che l'esploratore potrebbe aver incontrato ?

- A. 0
- B. 1
- C. 2 (*)
- D. 3
- E. 4

La seguente tabella riporta le possibili tribù (S, L e B) dedotte dai valori booleani (V e F) in funzione delle quattro risposte e del giorno della settimana:

	lunedì	venerdì	altrodì
1	$V \rightarrow S$	$F \rightarrow B$	$F \rightarrow B$
2	$F \rightarrow B, L$	$V \rightarrow S, L$	$V \rightarrow S, L$
3	$F \rightarrow B, L$	$V \rightarrow S, L$	$F \rightarrow B$
4	$V \rightarrow S$	$F \rightarrow B$	$V \rightarrow S, L$

Da essa si ricava che il massimo **numero di Lunatici è 2 (risposta C)**.

8) Gli scacchi di Neurolandia

Anche a Neurolandia esistono gli scacchi, ma i pezzi sono sostanzialmente diversi, per fare "impazzire" i giocatori. Uno di questi è il *tor-pedone*, a cui è permesso fare sia le mosse della *torre* (avanti o indietro di una o più caselle, lungo le righe o le colonne), sia le mosse della *pedina della dama* (solo in diagonale, di una casella e verso l'alto). Se un *tor-pedone* si trova nella casella in basso a sinistra, può raggiungere la casella in alto a destra in sole due mosse (come una torre su una riga e una colonna); se invece si limitano le mosse della torre a 20, qual è il massimo numero di mosse per ottenere lo stesso risultato?

- A. meno di 100
- B. fra 101 e 125
- C. fra 126 e 145
- D. fra 146 e 165
- E. più di 165 (*)

Con 7 mosse alternate da pedina, il *tor-pedone* si trova nella seconda casella in alto, da cui torna in basso con una mossa da torre; con analoghe 7 mosse da pedina si trova nella prima casella in alto, da cui torna in basso, nel punto iniziale, con una mossa da torre. Ripetendo 10 volte il procedimento per esaurire le 20 mosse da torre, raggiungiamo poi la casella finale con 7 mosse da pedina. Abbiamo allora $14 \times 10 + 20 + 7 = 167$ mosse **(risposta E)**.