Gran Premio di Matematica Applicata

EDIZIONE 2017- 2018 – seconda manche

Quesito n°	1	2	3	4	5	6	7	8
Risposta	3544/7531	31, ma non accettabile	40,97…	**C**	**B**	**D**	**A**	**C**

QUESITI A RISPOSTA APERTA

1) Una frazione … semplificata male?

Lo zio Pit ha scoperto che esistono frazioni in cui l'eliminazione di una cifra al numeratore e al denominatore è possibile senza produrre alcun errore, come la seguente: $\frac{xy44}{7yx1}$, dove x e y sono cifre da 1 a 9. Essa si semplifica così $\frac{x\cancel{y}44}{7\cancel{y}x1}=\frac{x44}{7x1}$

Dopo aver impostato algebricamente il problema, si trovino le frazioni che soddisfano le condizioni date.

RISPOSTA

Dopo aver impostato algebricamente il problema, si devono trovare le frazioni che soddisfano le condizioni date.
Ricordando che la posizione di una cifra di un numero è legata alle potenze di 10 (sistema decimale) l'equazione è data dall'uguaglianza frazionaria

$$\frac{1000x+100y+44}{7000+100y+10x+1}=\frac{100x+44}{700+10x+1}$$

dalla quale possiamo ricavare la

$y=\frac{10x^2+x-308}{10x-73}$, con $0 \le y \le 9$ e y intera, da cui

$$-\frac{28}{5} \le x \le \frac{11}{2}$$

l'unica soluzione intera $y = 5$ si ottiene per $x = 3$.

La frazione dunque è $\frac{3544}{7531}=\frac{344}{731}(=\frac{8}{17})$.

2) Le casse di pesche - dal film “Furore” (di John Ford - 1940. Con H.Fonda, J.Carradine, J.Darwell, C.Grapewin)

Tom Joad (Henry Fonda), i suoi genitori, il fratello e una sorella, agricoltori caduti in miseria, attraversano gli Stati Uniti per raggiungere la California, accettando qualunque lavoro….
Assunti in un latifondo, devono raccogliere e riempire grandi casse di pesche con la paga di 1,70 \$ a cassa per gli uomini e 1,30 \$ a cassa (solo di poco più piccola) per le donne, ricavando 23,20 \$. Però, dopo pochi giorni, l’abbondanza di manodopera permette ai latifondisti di ridurre la paga a 1,30 \$ e a 0,90 \$, causando gravi disordini nel campo di lavoro. Dopo vari litigi, i Joad riescono ad andarsene prima del precipitare degli eventi, guadagnando ancora la misera somma di 15,10 \$. Quante casse di pesche hanno raccolto in tutto i Joad, sapendo che i maschi ne hanno raccolto più delle femmine?

RISPOSTA

Posto x, y, z e w le casse raccolte da maschi e femmine prima e dopo la variazione di paga, abbiamo le due equazioni

$1{,}7x + 1{,}3y = 23{,}2$ e $\qquad 1{,}3z + 0{,}9w = 15{,}1$,

ovvero

$17x + 13y = 232$ e $\qquad 13z + 9w = 151$.

La soluzione intera e positiva della prima sono:

$x = 6$, $y = 1$

quella della seconda è

$z = 4$, $w = 11$.

In tutto sono state raccolte 6+10+4+11 = 31 casse

Ma dovendo essere $x+z > y+w$ il problema non ha soluzione

3) Gli orti di Neurolandia

Anche a Neurolandia si possono coltivare primizie in appositi orti. La “neuro-legge” che lo permette è però molto precisa e severa:

1. gli orti devono essere quadrilateri convessi,
2. i loro lati consecutivi devono misurare nell’ordine 5m, 6m, 7m e 8m,
3. una diagonale deve misurare 9m.

È comunque possibile scegliere a quale delle due diagonali attribuire la misura 9m per massimizzare la superficie dell’orto.
Risolvere il problema determinando l’area massima che l’orto può avere.

RISPOSTA

Applicando la formula di Erone su due triangoli formati con la diagonale, abbiamo:

il triangolo con i lati 5, 6 e 9 ha superficie $S_1 = 12\sqrt{5}$,

il triangolo con i lati 7, 8 e 9 ha superficie $S_2 = 10\sqrt{2}$,

il triangolo con i lati 6, 7 e 9 ha superficie $S_1' = 2\sqrt{110}$,

il triangolo con i lati 5, 8 e 9 ha superficie $S_2' = 6\sqrt{11}$.

La possibili aree del quadrilatero sono $S = 12\sqrt{5} + 10\sqrt{2} \approx 40{,}9...$ e $S' = 2\sqrt{110} + 6\sqrt{11} \approx 40{,}8...$

QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

4) Un anno a Neurolandia

A Neurolandia l'accademia Matt&Matt propone di stabilire una legge numerica sul fatto che un anno è formato da 365 giorni. La risposta, forse esatta, è data dall'esimio Matteo De Matt, il quale afferma che 365 non è un quadrato (!), ma è la somma di quadrati di numeri interi (positivi) consecutivi! Quante sono le possibili somme?

A. nessuna
B. 1
C. 2
D. 3
E. più di 3

RISPOSTA

Nel caso di due quadrati consecutivi l'equazione $x^2 + (x+1)^2 = 365$ ha la radice accettabile $x = 13$,

nel caso di tre quadrati consecutivi l'equazione $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 365$ ha la radice $x = 11$ e,

non essendo possibile trovare soluzioni accettabili per quattro o più quadrati, abbiamo solo

due somme:

$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$ (**risposta C**).

5) L'elisir d'amore

Biancaneve e il principe azzurro, trovano in una grotta un'ampolla magica, contenente 80 cc di un elisir strepitoso. Se riescono a berne esattamente 40 cc a testa, sfuggiranno dalla malvagia Grimilde e saranno felici per sempre. Purtroppo nella grotta vi sono solo due bicchieri, che possono contenere al massimo 50 cc e 30 cc di elisir. Potendo versare a piacere il liquido magico dall'ampolla ai bicchieri (o viceversa) o anche da bicchiere a bicchiere, qual è il numero minimo di travasi necessari per raggiungere lo scopo?

A. 4
B. 5
C. 6
D. 7
E. 8

RISPOSTA

Indicando il contenuto dell'ampolla, del bicchiere da 50cc e del bicchiere da 30cc con una terna ordinata, inizialmente abbiamo (80, 0, 0).
Con tre travasi si ha (50, 0, 30), (50, 30, 0) e (20, 30, 30),

quindi Biancaneve beve 20cc dall'ampolla;

il quarto travaso è (0, 50, 10) e il principe beve 10cc dal bicchiere piccolo; infine l'ultimo travaso (0, 20, 30):
Biancaneve beve 20cc dal bicchiere grande e il principe beve 30cc dal bicchiere piccolo.

Un'altra soluzione in cui Biancaneve (o il principe) beve due volte di fila è la seguente: (30, 50, 0), (30, 20, 30), (30, 30, 0), (10, 50, 0) e (10, 20, 30).
Vi sono al minimo 5 travasi **(risposta B)**.

6) Il trapezio

In un trapezio isoscele il lato obliquo misura la metà della base maggiore e il doppio della base minore. Il suo perimetro (in cm) è numericamente uguale alla sua area (in cm^2). Quanto misura (in cm) la base maggiore?
A. meno di 10
B. fra 10 e 10,3
C. fra 10,3 e 10,6
D. fra 10,6 e 10,9
E. più di 10,9.

RISPOSTA

Detta x la base maggiore, la minore è x/4 e il lato obliquo x/2, da cui il perimetro 9x/4.

Con Pitagora si trova l'altezza $\frac{x\sqrt{7}}{8}$, da cui l'area $\frac{5x^2\sqrt{7}}{64}$.

Dall'equazione $\frac{5x^2\sqrt{7}}{64} = \frac{9x}{4}$, si ha $x = \frac{144\sqrt{7}}{35}$ ovvero x = 10,885…(**risposta D**).

7) Le cinque sorelle

Cinque sorelle Anna, Bruna, Chiara, Diana ed Elena talvolta si divertono a mentire per nascondere la loro età, che risulta essere 21, 22, 24, 25 e 26 anni (ma non nell'ordine dato sopra). A un ragazzo appena incontrato, che vorrebbe sapere l'età di Chiara, le sorelle hanno detto:

1. Anna: "Non sono l'ultima nata"
2. Bruna: "Chiara ha 24 anni"
3. Chiara: "Anna è più giovane di Elena"
4. Diana: "Elena ha 25 anni"
5. Elena: "Diana non è la maggiore".

Sapendo che solo le due più "anziane" hanno mentito, qual è l'età di Chiara?
A. 21
B. 22
C. 24
D. 25
E. 26

RISPOSTA

Dette A, B, C, D ed E le età di Anna, Bruna, Chiara, Diana ed Elena, abbiamo le cinque condizioni:

$A \neq 21$, $C = 24$, $A < E$, $E = 25$ e $D \neq 26$,

ma due di esse sono false,

con l'ulteriore condizione (vera) $\{A, B, C, D, E\} = \{21, 22, 24, 25, 26\}$.

La prima non può essere falsa, visto che mentono le sorelle di 25 e 26 anni, quindi A = 22 oppure A = 24;

la seconda è invece falsa, perché, se fosse vera, le "anziane" sarebbero Diana ed Elena con la contraddizione E = D = 26, quindi $C \neq 24$ e B = 25 oppure B = 26;

se fosse B = 25, Diana mentirebbe, da cui D = 26 e ci sarebbe una terza mentitrice, Elena, il che è impossibile;

allora B = 26, Elena è sincera e Diana mente, quindi D = 25, E = 24, A = 22 e, infine, C = 21.

(**risposta A**).

8) Innamorarsi a Neurolandia

Anche a Neurolandia ci si innamora, ma le “neuro-leggi” sono molto restrittive: gli appuntamenti possono avvenire solo fra le 19 e le 20. Se però un partner ritarda di oltre 10 minuti, l’altro è obbligato ad andarsene! Sapendo che è del tutto casuale il fatto di ritardare all’appuntamento (o di dimenticarsene), qual è la probabilità che due amanti si possano incontrare in quell’ora?

A. 1/4

B. 5/18

C. 11/36

D. 1/3

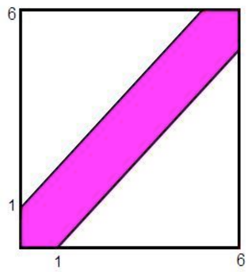
E. 13/36

RISPOSTA

In un’ora vi sono numero 6 blocchi da “10 minuti”,

quindi possiamo schematizzare la situazione mediante un quadrato di lato 6, nel quale è evidenziato un esagono corrispondente all’area di appuntamento,

ovvero 11 unità quadrate rispetto alle 36 totali.



La probabilità che si incontrino in quell’ora è 11/36 (**risposta C**).

Anche senza grafico si può pensare che, se uno dei due (per es.il maschio) è arrivato in un certo intervallo di “10 minuti”, la probabilità che arrivi anche l’altro è 1/6 e che non arrivi 1-1/6=5/6;

analogamente per la femmina, quindi la probabilità che non si incontrino è $(5/6)^2$ e che si incontrino è 1-25/36 = 11/36