Gran Premio di Matematica Applicata

EDIZIONE 2018-2019 – SOLUZIONI

Quesito n°	1	2	3	4	5	6	7	8
Risposta	17x+13v+9w =483, **35**	221x+263y = 6.597, **27 e 441**	**9**	**D**	**D**	**A**	**B**	**C**

1) Zaini e zainetti

Lo zio Pit, sponsor di un gruppo di scouts, regala loro zaini o zainetti, acquistati rispettivamente a € 22,10 e € 16,90. I primi 10 iscritti si assicurano uno zaino, mentre agli altri può capitare di ricevere uno zaino o uno zainetto. Essendo aumentate le iscrizioni, Pit decide di acquistare altri zaini e zainetti, ottenendo lo sconto di € 5,20, sia per i primi che per i secondi. Sapendo che l'esborso totale dello zio Pit è stato di € 627,90 e che a tutti è stato dato uno zaino o uno zainetto, quanti sono stati gli iscritti al gruppo?

Posto x, y, z e w il numero degli zaini e degli zainetti prima e dopo la variazione di prezzo, abbiamo l'equazione

$$22{,}1x+16{,}9y+16{,}9z+11{,}7w = 627{,}9,$$

ovvero $17x + 13(y + z) + 9w = 483$, dove $x \geq 10$.

Se v=y+z, essa diventa

$$17x + 13v + 9w =483,$$

a soluzioni intere, dipendenti da due parametri (*t,u* interi) con x max.

Una soluzione si trova ponendo x=0 e v multiplo di 3 (essendo 483 divisibile per 3), da cui v=6 e w=45,

quindi tutte le soluzioni intere positive sono date da

$x = 9t$, $v = 6 - 9u$ e $w = 45-17t + 13u$, con $t>1$, $\dfrac{17t-45}{13} \leq u \leq 0$

e da quest'ultima $t < 45/17 \approx 2{,}2$.

L'unico valore possibile è t=2 con u=0 e abbiamo la terna: x=18, v=6, w=11. L'ultima è la soluzione cercata con 18 + 6 + 11 = **35** scouts.

2) Dal film "Biancaneve e i sette nani" (Walt Disney -1937)

Le vicende meno conosciute del film riguardano l'attività dei nani nel gestire la miniera d'oro e di diamanti. Essi lavoravano in tre squadre e, ogni mese, la prima squadra riusciva a trovare un diamante spalando 13 t di materiale, la seconda un diamante ogni 19 t, la terza, setacciando tutto il materiale spalato, ricavava un'oncia d'oro per tonnellata. Prima dell'arrivo di Schneewittchen (Biancaneve), i nani hanno incassato, in un mese, ben 32.985 thaler (talleri), quando ogni diamante era quotato 650 thaler e l'oro 35 thaler/oncia.

Determinate quanti diamanti e quante once d'oro sono stati trovati in quel mese.

Se le prime due squadre hanno trovato x e y diamanti, sono state spalate 13x + 19y tonnellate di materiale, numero uguale alle once d'oro setacciate dall'ultima squadra.

Abbiamo allora l'equazione

$$650(x+y) + 35(13x+19y) = 32.985, \text{ cioè } 221x + 263y = 6.597.$$

Essa ha l'unica soluzione accettabile x = 12 e y = 15: i diamanti sono **27** e le once **441**.

3) I numeri "primini"

Si definiscono numeri "primini":

- i numeri primi di una cifra, cioè 2, 3, 5 e 7
- i numeri primi di due o più cifre, purché, sopprimendo una volta la cifra iniziale e una volta la cifra finale, si ottengano sempre due numeri "primini".

Quanti sono in tutto i numeri "primini" così definiti?

Un numero "primino" di due cifre può essere ottenuto utilizzando solo le cifre 2, 3, 5, 7; inoltre, dovendo essere primo, le due cifre devono essere fra loro diverse e la seconda non può essere né 2 né 5.
Si ottengono i numeri 23, 37, 53 e 73.

Quelli di tre cifre possono cominciare e finire solo con 23, 37, 53 o 73, ovvero solo i seguenti: 237, 373, 537 e 737.
Fra essi l'unico primo è il 373.

Quelli di quattro cifre possono cominciare e finire solo 373, ma ciò è impossibile e, di conseguenza, è anche impossibile che esista un "primino" di più di quattro cifre.

I numeri "primini" sono **9** ovvero: 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73 e 373.

4) Il triangolo diviso

Un triangolo scaleno ha i lati rappresentati da 3 numeri interi consecutivi e una mediana lo divide in due triangoli, di cui solo uno è isoscele. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

A. Il perimetro del triangolo è maggiore di 21 (unità)
B. L'area del triangolo è minore di 27 (unità quadrate)
C. La mediana che divide il triangolo è maggiore di 6 (unità)
D. **Le tre altezze sono tutte maggiori di 6 (unità)** (*)
E. Il triangolo è acutangolo

La mediana relativa al lato a di un triangolo è data da $m = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$ e possiamo supporre per gli altri due lati b > c.

Essendo uno solo dei due triangoli isoscele, esso si può formare solo con c, quindi m = c e, sostituendo, abbiamo $a^2 = 2(b^2 - c^2)$.

I lati sono numeri interi (positivi) consecutivi, ovvero x–1, x e x+1 e,
con la condizione b > c, abbiamo le tre possibili equazioni:

$(x-1)^2 = 2(x+1)^2 - 2x^2$,
$(x+1)^2 = 2x^2 - 2(x-1)^2$,
$x^2 = 2(x+1)^2 - 2(x-1)^2$;

la prima non è radici intere, la seconda non le ha reali e la terza ha le radici x = 0 (N.A.) e x = 8.

I lati del triangolo sono a=8, b=9 e c=7=m (>6), il perimetro è 24 (>21), un'altezza è $h = \sqrt{7^2 - 4^2} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7...$(>6), l'area è $S = 12\sqrt{5} \approx 26{,}8...$(<27), il triangolo è acutangolo perché $7^2 + 8^2 < 9^2$, una seconda altezza è data da $\dfrac{24\sqrt{5}}{7} \approx 7{,}6...$(>6) e l'ultima altezza è $\dfrac{24\sqrt{5}}{9} = \dfrac{8\sqrt{5}}{3} \approx 5{,}9...$(<6), quindi l'affermazione D è falsa.

5) $23cc_b = 12c9$?

Il numero intero 12c9 (scritto in base 10), dove c'è una cifra da 0 a 9, risulta uguale a 23cc, scritto in un'altra base *b*.

Determinate tale base.

A. $b = 5$

B. $b = 6$

C. $b = 7$

D. $\boldsymbol{b = 8}$ (*)

E. $b = 9$

Posta b la base, abbiamo $2b^3+3b^2+bc+c = 1200+10c+9$,

da cui $c = \dfrac{2b^3+3b^2-1209}{9-b}$ e,

sostituendo, le uniche soluzioni intere accettabili sono b=8 e c=7 (risposta D).

6) I tre foglietti

Carlo, Franco e Paolo, senza farsi vedere dagli altri, scrivono a caso su un foglio, un numero intero da 1 a 10. Qual è la probabilità che la somma dei tre numeri sia maggiore di 20?

A. **22%** (*)

B. 24%

C. 26%

D. 28%

E. 30%

I casi possibili sono $10^3 = 1000$,

mentre i casi favorevoli sono le terne soddisfacenti all'equazione $S = x + y + z > 20$, con $21 \leq S \leq 30$,

ovvero S=21: (1,10,10), (2,9,10)…(7,7,7), S=22: (2,10,10), (3,9,10)…(7,7,8), S=23: (3,10,10), (4,9,10)…(7,8,8), fino a S=30: (10,10,10),

dove le terne con tre numeri diversi vengono computate 6 volte e quelle con due numeri diversi 3 volte.

In tutto ne abbiamo 220, da cui P = 220/1000 = 22% (risposta A).

7) I triangoli

Se, come illustrato in figura, partendo da un triangolo equilatero di lato 1, costruiamo altri triangoli equilateri di lato 2, 3, … n, otteniamo un triangolo di lato n, che ha al suo interno altri triangoli di lato 1, 2, 3, … n-1.

L'esempio in figura riporta 1, 5 e 13 triangoli equilateri e, per evitare di costruirne e di contarne altri, si suggerisce che il numero dei triangoli di lati 4, 5 e 6 è rispettivamente 27, 48 e 78.

Nel caso n = 9, quanti sono in tutto i triangoli equilateri?

A. 225

B. **235** (*)

C. 245

D. 255

E. 265

Considerando la tabella delle differenze, in cui, per avere un dato in più, abbiamo riportato anche il caso banale n=0:

lato	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
tot. triangoli	**0**	**1**	**5**	**13**	**27**	**48**	**78**
diff. prima		1	4	8	14	21	30
diff.seconda			3	4	6	7	9
diff. terza				1	2	1	2

osserviamo che si presenta alla fine la ripetizione 1, 2, 1, 2. Da qui è facile, per addizione, ricavare il caso n = 9, (risposta B).

lato	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**
tot.triangoli	0	1	5	13	27	48	78	118	170	**235**
diff. prima		1	4	8	14	21	30	40	52	65
diff.seconda			3	4	6	7	9	10	12	13
diff. terza				1	2	1	2	1	2	1

8) Classe seconda B…

La seconda B della mia scuola è formata tutta da ragazze bellissime e alcune hanno gli occhi azzurri. Sapendo che la probabilità di incontrare per caso due di esse con gli occhi azzurri è esattamente il 50%. Quante sono le ragazze di seconda B, sapendo che sono più di 10 e meno di 33?

A. 19
B. 20
C. **21** (*)
D. 22
E. non si può stabilire non avendo informazioni sufficienti

Detto x il numero delle ragazze con gli occhi azzurri e n quello di tutte le alunne della classe, si ha l'equazione: $\frac{x(x-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$,

ovvero $x^2 - x - n(n-1)/2 = 0$,
da cui $\Delta = 1 + 2n(n-1) = n^2 + (n-1)^2$.

Siccome x è necessariamente intero, Δ è un quadrato perfetto;
ricordando le terne pitagoriche che hanno per cateti numeri interi consecutivi (3 e 4; 20 e 21; 119 e 120; ecc.), abbiamo molte (infinite!) soluzioni.
Tuttavia per legge n è compreso fra 10 e 33, quindi rimane solo $n = 21$.