

# GRAN PREMIO DI MATEMATICA - EDIZIONE 2023

## SOLUZIONI I MANCHE

Quesito	1	2	3	4	5	6	7	8
Soluzione	A	C	A	D	D	D	A	D

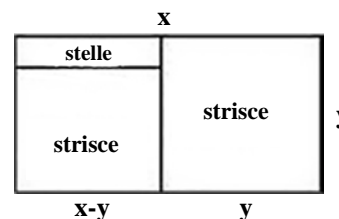
### 1) Il ciclista

Un ciclista percorre una strada a 36 km/h. Arrivato alla metà del suo cammino, trova numerose buche, che lo costringono a rallentare alla velocità di solo 24 km/h fino a destinazione. Qual è la velocità media del ciclista?

- A. **28,8 km/h** (\*)
- B. 29,2 km/h
- C. 29,6 km/h
- D. 30,0 km/h

Detto  $s$  il cammino (in km), il ciclista ne percorre una metà in  $s/72$  h e l'altra in  $s/48$  h. Il tempo complessivo è allora  $s/72$  h +  $s/48$  h =  $5s/144$  h, quindi la velocità media è  $144/5$  km/h = 28,8 km/h (risposta A).

2) La bandiera ufficiale dello stato di Mathemandia è formata da un rettangolo di 1.260 mathmetriquadri (un mathmetro è circa 17 cm), i cui lati sono espressi da numeri interi. All'interno c'è un rettangolo contenente le stelle e due quadrati contenenti le strisce, disposti come in figura. Non contando le possibili rotazioni e riflessioni, quante sono le bandiere diverse?



- A. 1
- B. 2
- C. **3** (\*)
- D. 4

Ponendo  $x$  e  $y$  i lati del rettangolo ( $x > y$ ), abbiamo l'equazione  $x \cdot y = 1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ .

Osservando la figura il quadrato maggiore ha lato  $y$ , quello minore  $x - y$ , da cui  $x - y < y$ ;

le limitazioni diventano  $y < x < 2y$ ,  $y^2 < xy < 2y^2$ ,  $y^2 < 1260$ ,  $y^2 > 630$  e infine  $3\sqrt{70} < y < 6\sqrt{35}$ .

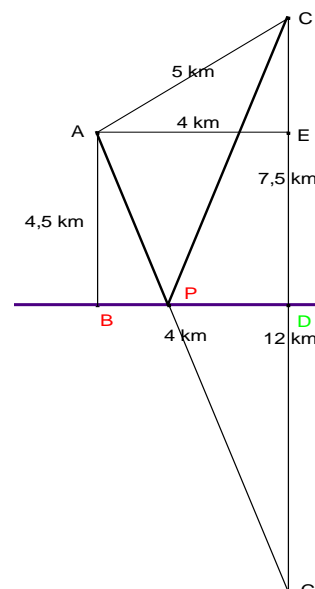
Essendo  $y$  intero abbiamo  $26 \leq y \leq 35$ , divisore di 1.260, cioè  $y_1 = 28$ ,  $y_2 = 30$ ,  $y_3 = 35$ , da cui

$x_1 = 45$ ,  $x_2 = 42$ ,  $x_3 = 36$ . I possibili rettangoli sono 3 (risposta C).

### 3) Il percorso

Un contadino deve attingere dell'acqua da un torrente e portarla a casa. Sapendo che si trova a 5 km da casa e a 4,5 km dal corso d'acqua, mentre la casa dista dallo stesso 7,5 km (v. figura), qual è il minor numero di km che deve percorrere?

- A. **meno di 12,65** (\*)
- B. fra 12,65 e 12,75 (escluso)
- C. fra 12,75 e 12,85
- D. più di 12,85



Considerando la figura si trova facilmente (Pitagora) che  $AE=BD = 4$  km; detto poi  $C'$  il simmetrico di  $C$  rispetto a  $BD$ , abbiamo  $C'D=DC= 7,5$  km, quindi  $C'E = 12$  km; il segmento  $AC'$  (distanza minima fra  $A$  e  $C'$ ) incontra il ruscello in  $P$ , ed essendo  $PC' = PC$ , il percorso minimo è proprio

$$AP + PC = AC' = \sqrt{AE^2 + C'E^2} = 12,649 \text{ km (risposta A).}$$

#### 4) I tondini di ferro

Una ditta produce tondini di ferro del diametro di 3 cm con una tolleranza massima di un millimetro se di prima qualità, di due millimetri se di seconda qualità; quelli di diametro minore di 2,8 cm o maggiore di 3,2 cm vengono scartati. Su 10.000 tondini prodotti ne vengono scartati meno di 100, ma solo il 31,5% è di prima qualità. Qual è, in millimetri, il diametro medio dei tondini di seconda qualità?

- A. compreso fra 28 e 29
- B. compreso fra 31 e 32
- C. compreso fra 28 e 29 oppure fra 31 e 32
- D. **nessuna delle risposte precedenti è corretta (\*)**

Per essere di seconda qualità i tondini devono avere un diametro, in millimetri, compreso fra 28 e 29 oppure fra 31 e 32, ma ogni media è compresa fra il minimo e il massimo dei dati, quindi il diametro è compreso fra 28 mm e 32 mm (risposta D).

#### 5) La tessera ricaricabile

La società telefonica TinFosSa propone l'attivazione di una promozione che ricarica automaticamente la tua tessera di un centesimo alla prima telefonata, di due alla seconda, di tre alla terza e così via fino a un massimo di un euro e a quel punto si disattiva. Qual è (al massimo) lo sconto applicato, sapendo che il costo di attivazione è di 10 € e che ogni tua telefonata ti costa in media 45 centesimi?

- A. meno del 65%
- B. fra il 65% e il 75%
- C. fra il 75% e l'85%
- D. **più dell'85% (\*)**

La promozione ricarica al massimo 100 volte ovvero per 100 telefonate, con uno sconto di centesimi  $1+2+3+\dots+100 = 5.050 = 50,50€$ . Dedotto il costo di attivazione (10€) abbiamo uno sconto complessivo di 40,50 € su una spesa (media) pari a  $0,45 \times 100 € = 45 €$ , cioè del  $40,5/45 = 90\%$  (risposta D).

#### 6) Il ricco e il povero

Pietro e Paolo sono due fratelli, uno è ricco e uno è povero. Un giorno Paolo chiede a Pietro 1.000 euro, promettendo di restituirgli € 100 al mese per 11 mesi.

Qual è il tasso annuo applicato?

- A. meno del 10%
- B. fra il 10% e il 15%
- C. fra il 15% e il 20%
- D. **più del 20% (\*)**

Paolo dà a Pietro un totale di € 1.100, quindi € 100 (= 10% del prestito) di interesse in 11 mesi, ma già al quinto mese gli aveva restituito metà della somma, quindi il tasso annuo è superiore al 20% (risposta D).

Nota: Il calcolo approssimato, tramite tavole finanziarie ci dà un tasso del 21,314%, ma non è usura, perché Paolo, che ha stabilito le condizioni, è il fratello ricco!

### 7) La piscina

Una piscina rettangolare ha i lati  $AB=CD = 10$  m e  $BC=DA = 60$  m.

Sulla sponda AB vi è la zona bimbi, profonda 90 cm per una lunghezza di 12 m, poi degrada uniformemente per arrivare alla zona trampolino, che ha una profondità di 6 m per una lunghezza di 14 m, sulla sponda CD.

Quanta acqua contiene la piscina, sapendo che la sua superficie è a 20 cm dal bordo?

- A. **2.001 m<sup>3</sup> (\*)**
- B. 2.003 m<sup>3</sup>
- C. 2.006 m<sup>3</sup>
- D. 2.008 m<sup>3</sup>

L'acqua della vasca occupa il volume di un prisma che possiamo considerare diviso in tre sezioni: uno di base rettangolare di m 0,70 x m 12 = 8,4 m<sup>2</sup>, un altro di base rettangolare di m 5,80 x m 14 = 81,2 m<sup>2</sup>, e, infine, uno di base trapezoidale con i lati paralleli pari a m 0,70 e m 5,80, di altezza (60-12-14) m = 34 m con un'area di (0,7+5,8)x17 m<sup>2</sup> = 110,5 m<sup>2</sup>. Il prisma ha quindi una base di (8,4+81,2+110,5) m<sup>2</sup> = 200,1 m<sup>2</sup>; esso è alto 10 m, quindi ha un volume di 2.001 m<sup>3</sup> (risposta A).

### 8) Lo stemma di Neurolandia

Neurolandia ha uno stemma ottagonale concavo, in cui si alternano: quattro lati uguali "lunghi" e quattro lati uguali "corti", quattro angoli uguali concavi e quattro angoli uguali acuti.

Sapendo che: i lati sono rappresentati da numeri interi (in cm), la somma dell'angolo concavo e di quello acuto è 270° e l'area dell'ottagono è 40 cm<sup>2</sup>, quanto misura il perimetro?

- A. 48 cm
- B. 64 cm
- C. 72 cm
- D. **nessuna delle risposte precedenti è corretta (\*)**

L'uguaglianza alternata di quattro lati e di quattro angoli, ci permette di stabilire che l'ottagono ha un centro di simmetria ed è formato da 4 triangoli rettangoli, di area 10 cm<sup>2</sup>, la cui ipotenusa è il lato "lungo", che indichiamo con x (in cm); se y è il lato "corto" (in cm) e z è il cateto minore (in cm), applicando Pitagora abbiamo l'equazione  $z^2 + (y+z)^2 = x^2$ , cioè  $2z^2 + 2zy + y^2 - x^2 = 0$ , da cui tro-

viamo la radice positiva  $z_1 = \frac{\sqrt{2x^2 - y^2} - y}{2}$  e

l'altro cateto  $z_1 + y = \frac{\sqrt{2x^2 - y^2} + y}{2}$ .

L'area del triangolo è allora  $S = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2x^2 - y^2} - y}{2} \frac{\sqrt{2x^2 - y^2} + y}{2} =$

$\frac{x^2 - y^2}{4}$  da cui l'equazione  $x^2 - y^2 = 40$ ; le radici sono intere, ovvero ottenibili solo dai due sistemi

$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 2 \end{cases}$  e  $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$  che, risolti, forniscono le due possibili soluzioni  $\begin{cases} x_1 = 11 \\ y_1 = 9 \end{cases}$   $\begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = 3 \end{cases}$ ,

da cui i due perimetri  $4(x_1+y_1) = 80$  o  $4(x_2+y_2) = 40$ . (risposta D).

