

# Gran Premio di Matematica Applicata

EDIZIONE 2023 – seconda manche del 17 febbraio 2023

## QUESITI A RISPOSTA APERTA

### 1) La lotteria di capodanno

La nuova lotteria statale abbinata a “Canzonissima” funziona in questo modo: da settembre a capodanno, ogni giorno, per 100 giorni di fila, vengono messi in palio 100.000 €, a disposizione di due cittadini, estratti a sorte fra i possessori di un biglietto, che hanno inviato alla Rai il loro recapito telefonico.

Il primo di essi lancia un dado (virtuale di 6 facce) e incassa 5.000 € per ogni punto fatto, ovvero da 5.000 a 30.000 €; il secondo lancia invece una moneta (sempre virtuale) e, se viene testa, incassa la metà della somma rimasta in quel giorno, se viene croce 10.000 € di consolazione.

Le somme rimanenti costituiscono il Jackpot, che, insieme al montepremi di un milione e mezzo di euro, determinerà l'importo del primo premio della lotteria.

A quanto ammorterà in media questa vincita?

#### Risposta

Essendo gli eventi equiprobabili, il cittadino che lancia il dado ha la “speranza media” di vincere  $(5.000+30.000)/2 = 17.500$  €;

analogamente quello che lancia la moneta vince in media

$((100.000-17.500)/2 + 10.000)/2 = 25.625$  €.

In media, ogni giorno, rimangono per il Jackpot  $(100.000 - 17.500 - 25.625) = 56.875$  €,

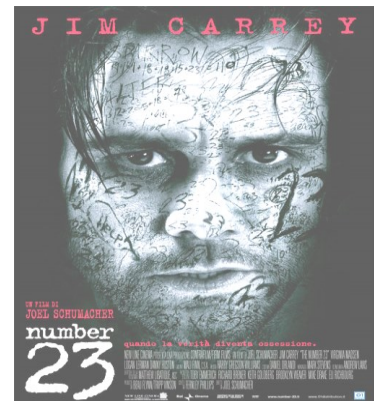
quindi il primo premio della lotteria sarà, in media  $1.500.000 + 56.875 \times 100 = 7.187.500$  euro.

### 2) Dal film “The Number 23” (di Joel Schumacher – 2007)

Coinvolto in una terribile spirale ossessiva legata al numero 23, Walter Sparrow (Jim Carrey) vede la sua vita, un tempo idilliaca, trasformarsi in un inferno di torture psicologiche, che potrebbero portarlo alla morte, così come a quella dei suoi cari...

In effetti 23 è un numero primo ed è formato da 2 e da 3, anch'essi primi; inoltre, “aggiungendo” di seguito a destra la cifra 3, otteniamo la successione di interi: 233, 2.333, 23.333, 233.333...

Dopo aver rappresentato algebricamente i termini della successione, trovate in essa i primi due numeri composti.



#### Risposta

$23 = 2 \cdot 10 + 3$ ,  $233 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 3$ ,  $2.333 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 3$ ,

quindi un numero formato da un “2” e seguito da  $n$  “3”, è dato da

$$2 \cdot 10^n + \sum_{i=0}^{n-1} 3 \cdot 10^i = 2 \cdot 10^n + \frac{10^n - 1}{3}.$$

I numeri 233, 2.333 e anche 23.333 sono primi;

invece  $233.333 = 353 \cdot 661$  e  $2.333.333 = 19 \cdot 227 \cdot 541$  sono composti.

### 3) Una strana ipotenusa

Anche nel paese di Neurolandia si studia il teorema di Pitagora, il cui enunciato è molto più semplice:

“in un triangolo rettangolo di cateti  $a$  e  $b$ , se  $c$  è l'ipotenusa, allora  $c = a + b$ ”.

Infatti, i Neurolandiani, considerano l'ipotenusa “tonda”, ovvero un arco di circonferenza, che ha come corda l'ipotenusa vera!

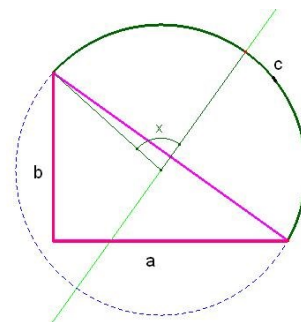
Dopo aver modellizzato il problema con opportune equazioni e/o grafici cartesiani, si risolve il caso in cui  $a = 4$  cm,  $b = 3$  cm, determinando la lunghezza del raggio della circonferenza comprendente l'arco considerato (in cm, approssimata a due decimali).

#### Risposta

Se  $r$  è il raggio del cerchio e  $2x$  l'angolo al centro sotteso dall'arco, abbiamo

$$c = 2rx \text{ e la corda } \sqrt{a^2 + b^2} = 2r \sin x,$$

$$\text{da cui } \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b} = \frac{\sin x}{x}.$$



Posta  $k$  ( $0 < k < 1$ ) la costante del primo rapporto,  $x$  è dato dall'intersezione fra la retta  $y = kx$  e la sinusoide  $y = \sin x$ .

Nel caso in cui  $a = 4$  cm,  $b = 3$  cm, abbiamo l'equazione  $x = 7/5 \sin x$ , risolvibile iterativamente in solo 4 passaggi (converge molto rapidamente):

posto  $x_0 = \pi/2$ , abbiamo

$$x_1 = 7/5 \sin \pi/2 = 1,400,$$

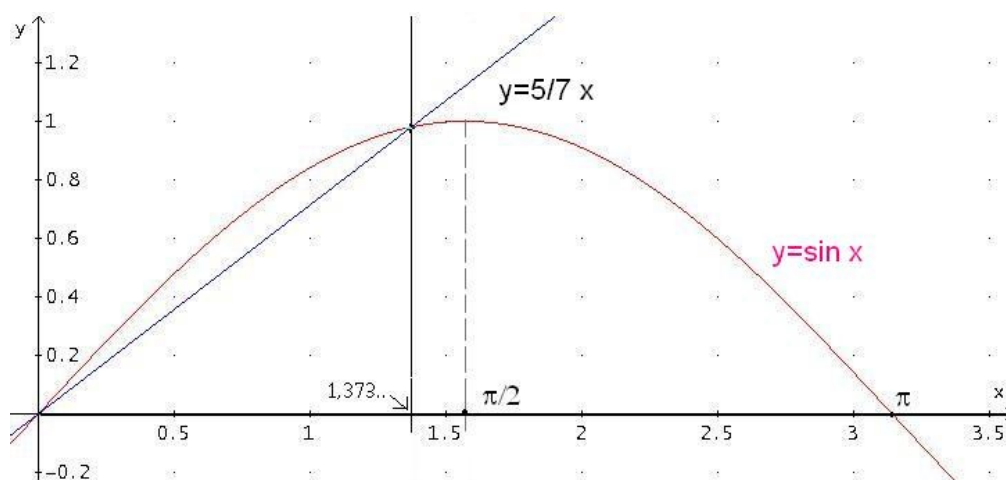
$$x_2 = 7/5 \sin 1,4 = 1,379,$$

$$x_3 = 7/5 \sin 1,379 = 1,374,$$

$$x_4 = 7/5 \sin 1,374 = 1,373...$$

da cui si ottiene  $r = \text{cm } \frac{7}{2 \cdot 1,373} = \text{cm } 2,55$ .

Il relativo grafico cartesiano è il seguente:



## QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

### 4) La locomotiva

Le ruote anteriori di una locomotiva hanno la circonferenza di 3 metri; il diametro delle posteriori supera di cm  $20/\pi$  quello delle anteriori. Dopo quanti chilometri, le ruote anteriori compiono esattamente 100 giri più delle posteriori?

- A.  $1,2 \pi$
- B. 4,5
- C.  $1,5 \pi$
- D. 4,8**
- E.  $1,6 \pi$

### Risposta

La circonferenza delle posteriori è cm  $(300 + 20/\pi \cdot \pi) = \text{cm } 320 = \text{m } 3,2$ .

Posta  $x$  la distanza cercata (in metri), abbiamo l'equazione:

$x/3 = x/3,2 + 100$ , cioè  $x = 4.800$  (risposta D).

### 5) Il torneo di scacchi

Otto persone partecipano a un torneo di scacchi ad eliminazione diretta: si estraggono a sorte la prime quattro coppie, i vincitori, sempre estratti a sorte, giocano le semifinali, ed infine i due rimanenti la finale. Pietro e Paolo sono decisamente i migliori, essendo in grado di battere con certezza gli altri sei avversari. Essi hanno praticamente le stesse probabilità di vincere, anche se Pietro è poco più forte di Paolo (il 2%). Qual è la probabilità che Paolo batta Pietro in finale?

- A. Meno del 18,5%
- B. Fra il 18,5% e il 22%
- C. Fra il 22% e il 25,5%
- D. Fra il 25,5% e il 29%**
- E. Oltre il 29%

### Risposta

Osservando la differenza del 2%, si trova che Paolo ha il 49% di vittoria (e Pietro il 51%).

Ora, per incontrarsi in finale, Paolo non deve giocare la prima partita con Pietro ( $p=6/7$ ) e nemmeno la seconda ( $p=2/3$ ),

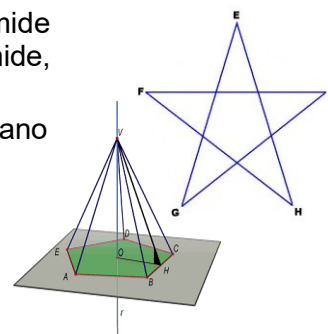
quindi la probabilità cercata è  $p = 6/7 \cdot 2/3 \cdot 49\% = 28\%$  (risposta D).

### 6) La stella e la piramide

Se pieghiamo i triangoli di una stella a 5 punte, otteniamo una piramide pentagonale regolare (come nelle figure). Qual è il volume di tale piramide, approssimato con 2 decimali, sapendo che lo spigolo di base è cm 6?

(tenere presente che gli angoli interni di un pentagono regolare misurano  $108^\circ$ ).

- A.  $170,46 \text{ cm}^3$
- B.  $170,47 \text{ cm}^3$
- C.  $170,48 \text{ cm}^3$
- D.  $170,49 \text{ cm}^3$
- E.  $170,50 \text{ cm}^3$**



## Risposta

La superficie di un poligono regolare di  $n$  lati, lunghi  $l$ , è data da  $S = nl^2/4 \cot(\pi/n)$ .

Nel nostro caso si ha  $S = 45 \cot(\pi/5) \text{ cm}^2$ .

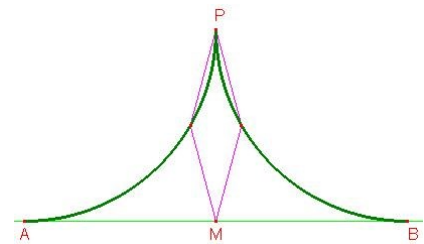
Ricavata col teorema di Pitagora l'altezza della piramide, abbiamo  $V = Sh/3$ , ovvero

$$V = 18(5 + 2\sqrt{5}) \text{ cm}^3 = 170,498... \text{ cm}^3 \text{ (risposta E).}$$

### 7) Il rombo bombo

Due quarti di circonferenza di raggio  $r$  sono tangenti in  $A$  e in  $B$  alla retta  $AB$  e fra loro in  $P$ . Determinare il lato del rombo che ha per diagonale  $PM$ , dove  $M$  è il punto medio del segmento  $AB$ .

- A.  $r(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$
- B.  $2r(2 - \sqrt{3})$
- C.  $r(2\sqrt{2} - \sqrt{3})/2$
- D.  $r(2 - \sqrt{2})$
- E.  $2r(\sqrt{3} - \sqrt{2})$



## Risposta

Abbiamo  $PM = r$ , la seconda diagonale dimezza la prima e, di conseguenza, taglia le circonferenze, dalle quali sono estratti i quarti, secondo una corda lunga  $r\sqrt{3}$  (lato triangolo equilatero).

La diagonale minore è lunga  $(2r - r\sqrt{3})/2$ , da cui si ricava il lato del rombo  $r(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$ , che è il lato del dodecagono regolare inscritto (risposta A).

### 8) La tassa sul macinato

Due contadini vogliono vendere al mercato rispettivamente 64 e 20 sacchi di farina, ciascuno del valore di 110 denari. Essendo amici, entrano insieme in città, ma devono pagare una tassa su ogni sacco che intendono vendere. Purtroppo non hanno soldi, quindi il primo lascia ai gabellieri 5 sacchi di farina, il secondo 2 sacchi. Quanti denari deve dare il primo contadino al secondo, per compensarlo della divisione iniqua della tassa?

- A. 30 denari
- B. 40 denari**
- C. 50 denari
- D. 70 denari
- E. 90 denari

## Risposta

Sette sacchi di farina equivalgono a 770 denari, che è la gabella complessiva per  $64 + 20 - 7 = 77$  sacchi destinati alla vendita.

La tassa per ogni sacco è quindi  $770/77 = 10$  denari.

Il primo contadino doveva pagare 590 denari di tassa, ma ne ha pagati 550, il secondo 180, ma ne ha pagati 220.

Il primo deve al secondo 40 denari (risposta B).